大気力学に表れる２階線型常微分方程式の解法
―非標準形から標準形への変形―

吉　崎　正　憲*

キーワード：２階線型常微分方程式、標準形

１．はじめに

物理で支配される大気力学では２階線型常微分方程式で記述されることが多い。気象・海洋でよく知られた式として、赤道域における大規模大気運動を表す赤道波の式がある。ｘ、ｙ、ｔ、ｋ、ωをそれぞれ東西座標、南北座標、時間、東西波数、周波数とすると、Matsuno（1966）は赤道β面における浅水方程式を使って、南北風$V(y)e^{ikx-i\omega t}$に関して、

$$\frac{d^2V}{dy^2}+\left[-k^2+\frac{k}{2\omega}+\omega^2-\frac{y^2}{4}\right]V=0 \quad （１）$$

を得た。（１）の解は放物柱関数と呼ばれる。この式は奇整数(2n+1)の固有値を持つ調和振動子のSchrödinger方程式を表し、赤道波の分散関係（k、ω）は

$$2\omega^3-(2k^2+2n+1)\omega-k=0 \quad （２）$$

と表される。ここでｎは整数を表す。Matsuno（1966）は、

$$\frac{d^2H}{dy^2}-y\frac{dH}{dy}+nH=0 \quad （３）$$

のHermite多項式H(y)の解を用いて、n＝-1のときはケルビン波、n＝0のときは混合ロスビー重力波、n＝1のときは赤道ロスビー波と慣性重力波と、赤道波の擾乱の構造を議論した。この微分方程式およびその解は公式集〔例えば、森口ほか（1999）の数学公式Ⅲ〕に掲載されている。

また1947年に中緯度帯の総観規模の低・高気圧の発生理論として提案されたCharneyの傾圧不安定波の式では、ｚを高さ方向の座標、ｌを南北波数とし、一般東西風をｚの一次関数、Sをロスビーの変形半径に関する量、βをベータ効果に関する量、Hをスケール高度、渦位の擾乱を$\Psi(z)e^{ikx-i\omega t}\cos(ly)$とすると、$\Psi$の構造は

$$\left(z-\frac{\omega}{k}\right)\left[\frac{d^2\psi}{dz^2}-\frac{1}{H}\frac{d\psi}{dz}-\left(k^2+l^2\right)S\Psi\right]+\left(\beta S+\frac{1}{H}\right)\Psi=0 \quad （４）$$

と表される。この式の導出や無次元化はPedlosky (1987) に従った。ここで、ωの虚数部は時間に関する成長率である。Charney（1947）は擾乱の東西スケールがロスビーの変形半径と同じオーダーのときに成長率が最大になることを示した。しかし、（４）の形は必ずしも公式集に載ってはいない。

これからは公式集と同じ形のものを標準形、異なるものを非標準形と呼ぶことにする。もともと常微分方程式にはさまざまな形があって、必ずしも標準形ばかりではない。もし非標準形の常微分方程式を標準形に変形するとするならば、その変形の過程の意味を理解する必要がある。標準形への変形の必然性が理解できれば、複雑な常微分方程式に直面した時、解けるかどうか判断することができ、解ける場合にはその解を見通すことができる。ここで解説するテクニックは通常教科書ではたった１行で書かれる（あるいは書かれていない）ことであるが、大気力学を勉強しようとする初学者にとってはその行間の意味を知るのは意義がある。しかし以下に述べるように、非標準形から標準形にいつも変換できるわけではないのであらかじめ了解していただきたい。

本稿では、問題として、次の２階常微分方程式

$$\frac{d^2F}{dx^2}+b^2x^cF=0 \quad （５）$$

を例にあげ、その変形の仕方を述べる。ここでｂとｃは定数であり、Ｆはｘの関数である。一例として、b＝ω、c＝0の場合、Ｆは$\sin(\omega x)$と$\cos(\omega x)$の和として表される。しかし、ｃが不定の場合、その一般解は一見むずかしそうである。ところが、例えば、森口ほか（1999）の162ページを見ると、解は

＊ 立正大学地球環境科学部

$$\sqrt{x}\,Z_{1/(c+2)}\left[\frac{2b}{c+2}x^{(c+2)/2}\right] \quad (6)$$

であらわれる。ここで、$Z_j(\xi)$ は Bessel 関数であり、

$$\frac{d^2 Z_j}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dZ_j}{d\xi}+\left(1-\frac{j^2}{\xi^2}\right)Z_j=0 \quad (7)$$

を満たす。Bessel 関数は標準形であり、この変形をもとにさらに先に進むことができる。今後 x、y など出てくる変数は気象学の通常の使い方と異なるので注意する。

この変形にあたって、(a) どうして x の (c+2)/2 のべき乗となるのか、(b) どうして Bessel 関数がでるのか、の二つの疑問が残る。ここでは上記の疑問を明らかにすることにより、（５）の非標準形の式から（６）の標準形の式への変形の意味を理解することにする。しかし、そのためにはある程度数学が必要なので、本稿では必要な数学を復習しながら順次説明をする。２節では、全体を理解するのに必要な数学用語を説明する。３節では、大気力学で頻出する２階常微分方程式を超幾何関数型、合流型超幾何関数型、楕円体関数型の三つに分けて説明する。上記の疑問の理解のためには前二つの型までで十分なので、二つの型について詳述する。三つ目の型の説明は付録Ａに入れ、その型の典型である Laplace 潮汐方程式について述べる。４節では、本稿の目的である（５）から（６）への展開を行い二つの疑問に答える。したがって、数学が得意の人は２節と３節をスキップしてもかまわない。

２．数学用語の簡単な説明

W を x の関数とすると、大気力学で頻出する２階常微分方程式は、一般に

$$\frac{d^2 W}{dx^2}+p(x)\frac{dW}{dx}+q(x)W=0 \quad (8)$$

と表わされ、係数 p と q は x の代数式で表現される。（５）の場合は、p が０、q が b^2x^c に相当する。（８）を満たす関数は特殊関数と呼ばれる。これまで多くの著名な数学者や物理学者がこの種の微分方程式を研究してきて、人名を冠につけた関数がこれから多く現れる。本稿は、寺沢（1969)、犬井（1974)、篠崎ほか（1993)、森口ほか（1999）をもとに概要を紹介する。ここで初学者にとって見慣れない数学用語（正則点、確定特異点、不確定特異点、ランク（級））がでてくるが、しばしの辛抱が必要である。

(a)正則点および無限大の扱い

x は複素変数とする。関数 p(x)、q(x) が共に x＝a でテイラー級数に展開できるとき、つまり、

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-a)^n,\quad q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-a)^n \quad (9)$$

とすると、p_n と q_n は既知となる。その場合、W の解は

$$W(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-a)^n \quad (10)$$

と書くことができる。これを解析的すなわち正則であるといい、x＝a は正則点という。係数 C_0と C_1を与えれば、$C_n(n>1)$ は順次決まり、W は正則点 x＝a における解となる。二つの係数が未知数なのは２階常微分方程式だからである。

x＝∞ の場合を考える。遠方を眺めるといろいろな方向があり、無限大とは感覚的に多くの値をもちそうである。ところが、$v=x^{-1}$と置き換え、$d/dx=-v^2d/dv$、$d^2/dx^2=-v^2d(-v^2d/dv)/dv=v^4d^2/dv^2+2v^3d/dv$ とすると、（８）は

$$\frac{d^2W}{dv^2}+\left(\frac{2}{v}-\frac{p(v)}{v^2}\right)\frac{dW}{dv}+\frac{q(v)}{v^4}W=0 \quad (11)$$

となり、(x＝∞ に対応する) v＝0 の周りの通常の微分方程式となる。つまり、数学では、x＝∞ は一点として扱うことになる。

(b)確定特異点

正則点でないとき、特異点という。中でも、p(x) が x＝a で一位の極、q(x) が x＝a で二位の極を持つとき、つまり、

$$p(x)=\frac{P(x)}{x-a},\quad q(x)=\frac{Q(x)}{(x-a)^2} \quad (12)$$

とおき P(x) と Q(x) は正則とするとき、x＝a は確定特異点という。（８）を

$$\frac{d^2W}{dx^2}+\frac{P(x)}{x-a}\frac{dW}{dx}+\frac{Q(x)}{(x-a)^2}W=0 \quad (13)$$

と書き直すと、W(x) は

$$W(x)=(x-a)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-a)^n \quad (C_0\neq 0) \quad (14)$$

なる級数解を満たすと仮定する。λ は指数と呼ばれる。

ここで、$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n (x-a)^n$、$Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} Q_n (x-a)^n$ とすると、$C_0 \neq 0$から

$$f(\lambda)=\lambda(\lambda-1)+P_0\lambda+Q_0=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) \quad (15)$$

が得られる。これは（13）の決定方程式と呼ばれる。

この決定方程式の根の性質により（13）の形が決まる。(i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$、$\lambda_1-\lambda_2 \neq$整数の場合、(ii) $\lambda_1 \neq \lambda_2$、$\lambda_1-\lambda_2=$正整数の場合、(iii) $\lambda_1=\lambda_2$の場合、の三つの場合分けがある。(i) の場合は、λ_1、λ_2ともに x＝a における（14）の形の独立解（W_1、W_2とする）があるので、それらの和は一般解となる。(ii) の場合、λ_1を指数とする解 W_1は (i) と同様に求まるが、λ_2を指数とする解 W_2はそのまま求めても W_1とは独立ではない。詳細な導出は上記の文献を参照することにして、別の独立解（Frobenius の方法と呼ばれる）は、

$$W_2(x)=(x-a)^{\lambda_2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial C_n(\lambda)}{\partial \lambda}+C_n(\lambda)\log(x-a)\right\}(x-a)^n\right]_{\lambda=\lambda_2} \quad (16)$$

と表される。これは対数項をもち、x＝a では対数特異点となる。こうして一般解は W_1と（16）の形の W_2の和として表される。(iii) の場合は、（16）の λ_2が λ_1となり、(ii) と同様である。

(c)不確定特異点とランク（級）

確定特異点でない特異点を不確定特異点という。この場合、解はいつも無限級数で表現されるわけではないが、x＝a が（８）の孤立不確定特異点の場合には、基本解は

$$W_1(x)=(x-a)^{\lambda_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n (x-a)^n、$$

$$W_2(x)=(x-a)^{\lambda_2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n (x-a)^n \quad (17)$$

あるいは

$$W_1(x)=(x-a)^{\lambda_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n (x-a)^n、$$

$$W_2(x)=(x-a)^{\lambda_2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n (x-a)^n+W_1(x)\log(x-a) \quad (18)$$

と表される。ここで、x＝a が孤立特異点であるのは、x＝a を除いたある範囲で正則であるときをいう。（17）と（18）では、和をとる範囲が 0 からではなく-∞ からとなっていることに注意する（Laurant 展開）。

森口ほか（1999）の68ページの注２に、ランク（級）r の定義がある。本稿で関心のある微分方程式が x＝∞ で不確定特異点をもつのが多いので、x＝∞ のランクだけを述べる。$p(x)=x^{\kappa}(e_0+e_1x^{-1}+e_2x^{-2}+\cdots)$、$q(x)=x^{\nu}(f_0+f_1x^{-1}+f_2x^{-2}+\cdots)$（$e_0$、$f_0 \neq 0$、$e_n$、$f_n$ は定数）であるとき、ランクは

$$r=\max\left(\kappa,\ \frac{\nu}{2}\right)+1 \quad (19)$$

と定義される。r>0 ならば、x＝∞を r 級の不確定特異点と呼ぶ。r≦0 ならば、x＝∞ は正則点または確定特異点となる。

３．微分方程式の分類

森口ほか（70ページ）によると、特殊関数の２階常微分方程式は３つ（I、II、III）の型に分けられる。I は３個の確定特異点をもち、超幾何関数型と呼ばれる。それに分類されるのは、Gauss の超幾何関数 G(x)（後述する（21）参照、以下同様）、Legendre 関数、球関数Ω(x)（（24）参照）、Legendre の多項式、Tchebycheff の多項式などである。II は１個の確定特異点とランク１級の不確定特異点（x＝∞）をもち、合流型超幾何関数型と呼ばれる。それに分類されるのは、Kummer の合流型超幾何関数 K(x)（（26）参照）、Bessel 関数 Z(x)（円柱関数）（（７）参照）、Hermite 多項式 H(x)（（３）参照）、放物柱関数 V(x)（（１）参照）などである。III は I や II より多くの特異点をもち、楕円体関数型と呼ばれる。例えば、回転楕円体波動関数 L(x)（付録 A（A3）参照）は２個の確定特異点と１級の不確定特異点（x＝∞）をもつ。

I や II の中に多くの種類の関数があるのは、物理現象が$\triangle^2$ W＝0（Laplace の式、空間３方向の２階微分の和）で表されることが多いため、境界に適合した解法として、球座標の場合は球関数、円筒座標の場合は Bessel 関数と、それぞれ発展したためである。

(a) 超幾何関数型の微分方程式

上記した関数の微分方程式はそれぞれ標準形であるが、ここでは I の名前の由来となった微分方程式を取り上げる。これは Gauss の微分方程式と呼ばれ、α、β、γ を定数とすると、

$$\frac{d^2G}{dx^2}+\frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]}{x(1-x)}\frac{dG}{dx}+\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}G=0 \quad (20)$$

と表される。ここでは、x＝0、x＝1、x＝∞ は確定特異点である。この解 G(x) は、

$$G(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{x^n}{n!} \qquad (21)$$

と表される。ここで、Γ(α) はガンマー関数であり、

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-x}\,x^{\alpha-1}\,dx \qquad (22)$$

と定義される。解 G は

$$\eta=\frac{A_1x+A_2}{A_3x+A_4} \quad \left(A_1A_4-A_2A_3\neq 0\right) \qquad (23)$$

など１次変換してもＩの範囲にとどまるので、(23) などは超幾何関数を変換するときに便利である。

超幾何関数の一つである球関数（あるいは Legendre 陪関数）$\Omega_n^m(x)$ についてみると、その微分方程式は

$$\frac{d^2\Omega_n^m}{dx^2}-\frac{2x}{1-x^2}\frac{d\Omega_n^m}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Omega_n^m=0 \qquad (24)$$

と表される。ここで m は波数、n(n+1) は固有値に相当する。大気力学でよく用いる解だけを記述すると、Gauss の超幾何関数を使って、

$$\Omega_n^m(x)=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{m/2}G\left(-n,n+1,1-m;\frac{1-x}{2}\right) \quad (25)$$

と表される。m＝0 の場合は、特に Legendre 関数と呼ばれる。

この解が大気力学でポピュラーなのは、全球モデルで緯度方向に展開するときにはその基底関数として球関数が良く使われるからである。この場合、m と n は整数となる。伏見・赤井（1981）にしたがって、x=cos θ（0≦ θ ≦ π；θ =0を北極、θ = π を南極に対応）とすると、Ω_n^0では n は南北方向の節線（緯線）を表す。これを帯球面関数と呼ぶ。一方、φ を経度とすると、Ω_n^m cos(m φ)、Ω_n^m sin(m φ) は、球面を (n−m) 本の緯線と m 本の経線（子午線、すなわち北極から南極まで、を１本と数えると、2m 本となる）と分けられる。これを縞球面関数と呼ぶ（図１）。

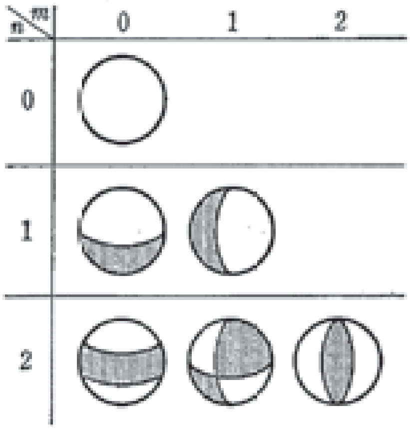


図１　Ω_n^m の帯球面関数・縞球面関数（伏見・赤井　1981）。m＝０の列が帯球面関数、m ≧１の列が縞球面関数。

⒝合流型超幾何関数型の微分方程式

II の名前の由来となった微分方程式は Kummer の微分方程式と呼ばれ、

$$\frac{d^2K}{dx^2}+\frac{(\gamma-x)}{x}\frac{dK}{dx}-\frac{\alpha}{x}K=0 \qquad (26)$$

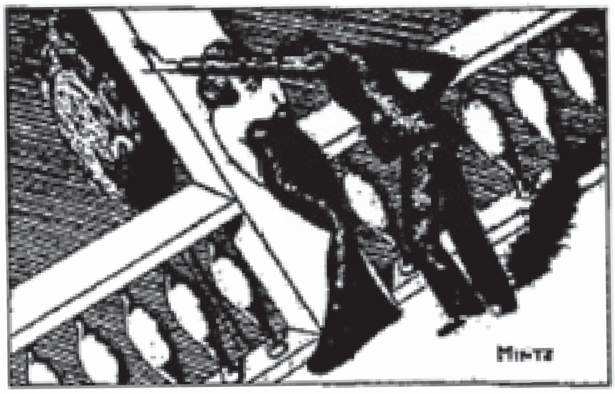
と表される。ここで、x＝0は確定特異点、x＝∞はランク１級の不確定特異点である。この解 K(x) は、Gauss の超幾何関数において、β x を x とおきかえ、β→∞ として、二つの確定特異点（１と∞）を合流させた場合に相当する。これが「合流型」の名前の所以である。したがって、解は

$$K(\alpha,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{x^n}{n!} \qquad (27)$$

と表される。

（４）の標準形は Charney（1947）の傾圧不安定波の構造を記述するのに使われた。不安定な解は $z-\dfrac{\omega}{k}=0$ の周りの展開式で表現される。（４）から（15）の決定方程式は、$\lambda_1=0$、$\lambda_2=1$であり、(16) のような形、つまり、対数特異点を持つ形で表される。これに関して、小倉（2000）の第１章に魅力的な挿絵が載っている（第２図）。図の説明をそのまま掲載する。“チャーニーが1947年に初めて傾圧不安定波の理論を提出したときに用いた関数が対数特異点を持つ（合流型）超幾何微分方程式の解を表す超幾何関数であった。図は当時 UCLA の学生新聞に載ったものである。チャーニーの難解な数学的解析に神秘性を感じたのか、彼の同僚のイエール・ミンツの弟のアーサー・ミンツが、ロマンチックな状況のもので、なおこのような関数の話をしている若き日の科学者を描いている。”ここまで本稿を読んできた読者には、第２図の説明は十分理解できるだろう。

II に属する微分方程式の標準形として Bessel 関数 Z(ξ) があり、その微分方程式は（７）で与えられる。それは Kummer の微分方程式の解を使って、



第２図　若き日のジュール・チャーニー。（小倉、2000から引用）

"… and since there are hypergeometric differential equations with logarithmic singularities …"

$$Z_j(\xi)=\frac{e^{-i\xi}\left(\frac{\xi}{2}\right)^j}{\Gamma(j+1)}K\left(j+\frac{1}{2},2j+1\,;2i\xi\right) \qquad (28)$$

と書くことができる（森口ほか（1999）57ページ参照）。このように、合流型超幾何関数型に属する微分方程式では、(28）のような変換によりIIの関数間を行き来することができる。

ここで、Gaussの超幾何関数（20）のうちβxをxとおきかえ$\beta\to\infty$とすることによりKummerの微分方程式（26）に変形できることを言った。しかし、Gaussの超幾何関数間の変形には（23）のように代数式であったが、Kummerの微分方程式の場合は（28）のように指数関数が表れる。不思議な感じがするが、指数関数が表れる理由については付録Bに述べる。

ほかに１節であげた赤道域における大規模大気運動を表す赤道波の式（１）もIIに属する微分方程式である。

４．（５）の解の求め方

少々回り道したが、１節の（５）に関する二つの疑問に立ち戻る。これまでの話から、（５）から（６）への変形に当たってはまず特異点に注目するのが肝心である.もし２階常微分方程式が三つ以下の確定特異点をもつときにはIのグループであるし、一つの不確定特異点をもち同時に一つ以下の確定特異点を持つときにはIIのグループに分類される。（５）のランクを調べると、(19）の$x=\infty$で、$\kappa=0$、$\nu=c$であることから、（５）は(c+2)/2級の不確定特異点をもつ微分方程式であることがわかる。これを、例えば、$x=\infty$で１級の不確定特異点を持つBessel関数に結びつけるならば、(c+2)/2級の不確定特異点をもつ微分方程式（５）を１級の不確定特異点をもつ微分方程式に変更しなければならない。そのためにxを$u=x^{(c+2)/2}$と置き換える必要がある。こうして、xの(c+2)/2のべき乗が出てくる。これが、疑問(a)に対する回答である。

さらに、（５）のF(x)はF(u)と置き換えると、

$$\frac{d^2F}{du^2}+\frac{c}{c+2}\frac{1}{u}\frac{dF}{du}+\frac{4b^2}{(c+2)^2}F=0 \qquad (29)$$

と変形される。続いて、$\zeta=2bu/(c+2)$とおくと、(29）は

$$\frac{d^2F}{d\varsigma^2}+\frac{c}{c+2}\frac{1}{\varsigma}\frac{dF}{d\varsigma}+F=0 \qquad (30)$$

となる。ここで、ρ、σ、δは定数として、(28）のやり方のように、

$$F(\varsigma)=e^{\rho\varsigma}\varsigma^{\sigma}Z(\delta\varsigma) \qquad (31)$$

とおいて（30）に代入し、（５）と比較すると、

$$\rho=0,\quad \sigma=\frac{1}{c+2},\quad \delta=1 \qquad (32)$$

が導かれる。また（７）の引数jは$(c+2)^{-1}$となる。こうして（６）が得られる。これが疑問(b)に対する回答である。

（５）で$c=0$の場合には、大気力学の基本となるsinやcosの振動解が得られる。同様に、（６）から解は

$$\sqrt{\xi}\,Z_{1/2}(b\xi) \qquad (33)$$

となり、半奇数次のBessel関数で表される。単純な振動解がBessel関数と意外なところで結びつくが、これは$c=0$の場合の微分方程式が$x=\infty$で一級の不確定特異点を持つからである。また$c=1$の場合は、虹を記述する場合などに表れる（例えば、Liou, 1980)。このように、微分方程式（５）およびその解（６）の応用範囲はかなり広い。

５．まとめ

本稿では,非標準形の２階常微分方程式を標準形の式へ導出するプロセスを解説した。２階常微分方程式の解を調べる場合には、特異点のランクとその属性、およびその数に注目するのが肝心である。少なくとも超幾何関

数型と合流型超幾何関数型に属する関数は標準形に変形することができる。

大気力学と数学が密接につながっているといっても、数学からと大気力学からでは見方がかなり異なる。数学の専門家ではない私のような素人が数学を語るのは不遜であるが、本稿は大気力学の記述を数学的な見方でまとめ直したことになる。大気力学で表れるさまざまな微分方程式に直面したとき、本稿で示した解法のテクニックを使うことにより、（すべてではないが）自らの手で解を得ることができる。初学者にとって、本稿が微分方程式を理解する糸口になることを期待する。

謝　辞

本稿をまとめるに当たり、小倉義光氏（イリノイ大学名誉教授）、新野宏氏（東京大学・大気海洋研究所）、山中大学氏（海洋研究開発機構）、安永数明氏（富山大学）、金子晃氏・真島秀行氏（御茶ノ水大学）、藤部文昭氏（気象研究所）、渡来靖氏（立正大学）にはいろいろなコメントをいただきました。感謝します．

付録Ａ：楕円体関数型の微分方程式

Ⅲに分類される２階常微分方程式は沢山あって、これまで見た超幾何関数型と合流型超幾何関数に比べて、系統的な体系化はなされていない。またⅠやⅡで見たような変換によって、Ⅲの標準形から非標準形の一般の微分方程式まで行ける保証もない。

ここでは、Ⅲの例としてLaplace潮汐方程式（LTE）を取り上げる。LTEは安定成層で回転流体の運動を球面で記述する微分方程式であり、大気の大規模運動を語るときに非常に重要である。無次元量の$\mu=\cos\theta$（θは90度－緯度）、sは東西波数、ω'は振動数、εは地球の自転と重力の比を表すと、南北流V'に関する微分方程式は

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{dV'}{d\mu}\right]+\frac{2\varepsilon\omega'^2\mu\left(1-\mu^2\right)}{s^2-\varepsilon\omega'^2\left(1-\mu^2\right)}\frac{dV'}{d\mu}$$
$$+\left[\frac{2\varepsilon s\omega'\mu^2}{s^2-\varepsilon\omega'^2\left(1-\mu^2\right)}-\frac{s^2}{1-\mu^2}-\frac{s}{\omega'}+\varepsilon\left(\omega'^2-\mu^2\right)\right]V'=0 \quad \text{(A1)}$$

と表される。一方、LTE（あるいはHough関数と呼ばれる）圧力Π'に関する微分方程式は、

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d\Pi'}{d\mu}\right]+\frac{2\mu\left(1-\mu^2\right)}{\omega'^2-\mu^2}\frac{d\Pi'}{d\mu}$$
$$+\left[\frac{2s\mu^2}{\omega'\left(\omega'^2-\mu^2\right)}-\frac{s^2}{1-\mu^2}+\frac{s}{\omega'}+\varepsilon\left(\omega'^2-\mu^2\right)\right]\Pi'=0 \quad \text{(A2)}$$

と表される。ここで、同じ方程式系から導出される微分方程式には共通の特異点が表れると考えると、(A1）と（A2）に共通の特異点は$\mu=\mp1$（確定特異点）と∞（1級の不確定特異点）である[*)]。そうするとこの解はⅢに属するものであり、森口たち（1999）の57節（249ページ～254ページ）の回転楕円体波動関数L(μ)で記述するのがよさそうである。その微分方程式は

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{dL}{d\mu}\right]+\left[\chi-l^2\mu^2-\frac{s^2}{1-\mu^2}\right]L=0 \quad \text{(A3)}$$

で表される。ここで、χは固有値であり、l、sは定数を意味する。χをn(n+1)とおくと、この式は超幾何関数型の（25）の球関数とほとんど同じであるが、$l^2\mu^2$の項があるために、$\mu=\infty$で１級の不確定特異点を持つ。それに対して、(A1）の$\mu=\mp\sqrt{\frac{\varepsilon\omega'^2-s^2}{\varepsilon\omega'^2}}$や（A2）の$\mu=\mp\omega'$の点は一見特異点のように見えるが、これらの点はV'、Π'の両方に共通に見られないので、これらの点は正則点であることが期待される。このような点は見かけの特異点と呼ばれる。

赤道β面近似の方程式系はLTEの一つの極限で表現される。

$\mu\to\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{-1/4}y$、$\omega'\to\sqrt{2}\varepsilon^{-1/4}\omega$、$s\to\sqrt{2}\varepsilon^{1/4}k$ とおき$\varepsilon\to\infty$

とすると（V'→V、Π'→Π)、Vの式は（１）となり、Πの式は、

$$\frac{d^2\Pi}{dy^2}+\frac{y}{2\left(\omega^2-\frac{y^2}{4}\right)}\frac{d\Pi}{dy}+\left[\frac{ky^2}{4\omega\left(\omega^2-\frac{y^2}{4}\right)}-k^2+\frac{k}{2\omega}+\omega^2-\frac{y^2}{4}\right]\Pi=0 \quad \text{(A4)}$$

となる。Πの微分方程式では、Vのものとは異なり、$y=\mp2\omega$に見かけの特異点を持ち、固有値（あるいは分散関係）を陽に見ることができない。Πの式から固有値が得られなかったのは、見かけの特異点を含む非標準形の微分方程式であったからである。しかし、分散関係とよく似た関係を見ることはできそうである。

再びLTEの式に戻る。すでに述べたように、(A1）や（A2）からV'もΠ'も見かけの特異点をもつので両方とも標準形の微分方程式ではない。Longuet-Higgins（1968）は、LTEの微分方程式を（24）の解である（25）で展開して数値計算で解くことにより、LTEの分散関係と解の構造を得た。おかげでLTEに関してはすべてわかったように思われるが、筆者が知る限り、LTEの分散関係の陽な式はまだ見つかっていない。LTEをより理解するには、一つにその微分方程式を（A3）のような標準形に導くことが必要であると思われる。それが得られるとき、LTEの陽なる分散関係と関数L(μ)の物理的な意味が明らかになり、次なる展開が始まると考えられる。

---

*) $\mu=\infty$の場合に１級の不確定特異点であることは以下のようにして示される。この場合（A1）は

$$\frac{d}{d\mu}\left[\mu^2\frac{dV'}{d\mu}\right]+2\mu\frac{dV'}{d\mu}+\varepsilon\mu^2V'=0$$

と簡略化される。(19）を使ってランクを計算すると、$\kappa=-$

1、ν =0であるので、ランクは1となる。これから1級の不確定特異点であることが分かる。

付録B：Gaussの超幾何関数とKummerの微分方程式の変形

公式集から、(20) を変形すると、Gauss超幾何関数は代数式で変換されるので、例えば、

$$G(\alpha,\beta,\gamma;x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}G(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;x) \quad \text{(B1)}$$

と書くことができる。ここで、Kummerの微分方程式の導出で行ったように、(B1) のβ xをxとおきかえ$\beta\to\infty$とすると、

$$\begin{aligned} K(\alpha,\gamma;x) &= \lim_{\beta\to\infty}\left[\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-\alpha-\beta} G\left(\gamma-\alpha,1-\frac{\gamma}{\beta},\gamma;-\frac{x}{\beta}\right)\right] \\ &= \lim_{\beta'\to\infty}\left(1+\frac{x}{\beta'}\right)^{\beta'} \times \lim_{\beta\to\infty} G\left(\gamma-\alpha,1-\frac{\gamma}{\beta},\gamma;-\frac{x}{\beta}\right) \\ &= e^{x}\times \lim_{\beta\to\infty} G\left(\gamma-\alpha,1-\frac{\gamma}{\beta},\gamma;-\frac{x}{\beta}\right) \quad \text{(B2)} \end{aligned}$$

と変形される。ここで、第2式の右辺第1項から第3式の右辺第1項へは指数関数の定義を使った。これから、Kummerの微分方程式の変形に指数関数がでてくる理由が理解できる。

引用文献

Charney, J. G., 1947: The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. J. Meteorol., 4, 135-163.

伏見康治・赤井逸，1981： 直交関数系 共立出版，246pp.

犬井鉄郎 , 1974: 特殊関数 岩波書店，376pp.

Liou, K.-N., 1980: An Introduction to Atmospheric Radiation. Academic Press, 392pp.

Longuet-Higgins, M. S., 1968: Phil. Trans. Roy. Soc. London, A262, 511-607.

Matsuno, T., 1966: Quasi-geostrophic motions in the equatorial area. J. Meteor. Soc. Japan, 44, 25-42.

森口繁一・宇田川銈久・一松信，1999： 数学公式III（全三冊） 岩波書店，310pp.

小倉義光，2000: 総観気象学入門 東京大学出版会，289pp.

Pedlosky, J., 1987: Geophysical Fluid Dynamics. Second edition. Springer-Verlag, 710pp.

篠崎寿夫・富山薫須・松浦武信・鈴木健文・矢沢志雄作，1993：現代工学のための常微分方程式とグリーン関数. 現代工学社，242pp.

寺澤寛一，1969： 自然科学者のための数学概論（増訂版）. 岩波書店，722pp.

Solutions of the Second-Order Ordinary Differential Equations Appeared in Atomospheric Dynamics —Into Standard Formes from Non-Standard Formes—

YOSHIZAKI Masanori*

*Faculty of Geo-Environmental Science, Rissho University