

Euler関数の導来対数関数 $L(x)$ の abc 予想とその検証

山下 倫 範* 宮田 大 輔** 藤田 菜 摘*

キーワード：Euler関数 φ の導来対数関数 L 、 abc 予想、計算機実験、primitive φ -triple

1 はじめに

Euler関数 φ に対して、 $\varphi^1(x) = \varphi(x)$ として $\varphi^k(x) = \varphi(\varphi^{k-1}(x))$ ($k > 1$) を考えると、 $x > 1$ のとき、 $\varphi(x) < x$ であるから、すべての $x > 1$ に対して $\varphi^k(x) = 1$ となるような最小の k が必ず存在する。この k の性質については、これまで Pilali (1929), Shapiro (1943, 1983), Murányi (1960) 等によって k が (不完全な) 対数性を有することが示され、その後、数多くの研究がなされ、現在ではこの k に修正を施すことによって (この、 k を以下 $L(x)$ と記す) 完全対数的であることも分かっている^{*1}。

本論文では、Euler関数の導来対数関数 $L(x)$ の諸性質やその拡張性について述べ、著者等が提出している $L(x)$ に関する abc 予想が primitive φ -triple 以外でも適当な条件の下で成立することを注意し、予想の検証についても言及する。

2 $L(x)$ に関する諸性質

2.1 $L(x)$ の完全対数性と評価

定義 1. (山下 1971) L を自然数 n に対して、次のように定義し、Euler関数 (の) **導来対数関数** という。

$$L(n) = \begin{cases} 0 & (n = 1) \\ L(\varphi(n)) & (n : \text{奇数} > 1) \\ L(\varphi(n)) + 1 & (n : \text{偶数}) \end{cases}$$

このとき、

* 1 山下は高校時代の1971年12月23日 (unpublished) に彼らとは異なる定義による k が完全対数的であることを示していた。その後、1977年に内山氏との往復書簡 (山下-内山, 内山-山下 1977) で、Pillai (1929), Shapiro (1943), Murányi (1960) の仕事を初めて知ったが、この時点では完全対数的な事実は学界では知られておらず、1983年初版のShapiro の教科書 (1983) でも完全対数的でなく、完全対数的にできることが学界で知られるようになったのは Prasad 等 (1987) の注意による。

命題 2. 任意の自然数 x, y について、 L は完全対数的である。すなわち

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

が成立する。

このことから、 L について、以下の簡単な評価が得られる。

命題 3. $L(x) = n$ であれば

$$2^n \leq x \leq 3^n$$

である。

これから直ちに

系 4.

(E1) $x \leq 2^n$ であれば $L(x) \leq n$ である。

(E2) $x \geq 3^n$ であれば $L(x) \geq n$ である。

系 5. x が偶数であり、 $L(x) = n$ であれば

$$x \leq 2 \cdot 3^{n-1}$$

である。

系 6. x が偶数であり、 $x > 2 \cdot 3^{n-1}$ であれば

$$L(x) > n$$

である。

等が得られ、次の評価式も得られる。

命題 7.

(E3) $\log_3 2 (\min(L(x), L(y)) + 1) \leq L(x+y)$

$$\leq \log_2 3 (\max(L(x), L(y)) + 1)$$

(E4) $L(x-y) \leq \log_2 3 \max(L(x), L(y))$

注意: $\log_2 3 \doteq 1.58496250 \cdots$, $\log_3 2 = 0.63092975 \cdots$

この L については、Euler関数 φ を拡張した形で、我々は次の定理も得ている。

定理 8. (宮田-山下 2001, 2004) $\mathbf{P}$ を素数の集合とし、

$f: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{N}$ を $1 \leq f(p) < p \in \mathbf{P}$ であるような関数とし、

$$\varphi_f(x) = x \prod_{i=1}^r \frac{f(p_i)}{p_i}, \quad x = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$$

そして

$$L_{\varphi_f}(1) = 0$$

$$L_{\varphi_f}(x) = L(\varphi_{\varphi_f}(x)) + \#\{p \in f^{-1}(1) : p|x\}.$$

* 立正大学地球環境科学部

** 千葉商科大学商経学部

とすれば、

$$L_{\varphi_f}(xy) = L_{\varphi_f}(x) + L_{\varphi_f}(y)$$

が成り立つ。

上記定理の φ_f は、 f によるEuler関数の一般化となる。
また、この定理の記号に従えば $L(x) = L_{\varphi_f}(x)$ である。

2.2 $L(x)$ の拡張性について

自然数上に定義された L は、 $L(-1) = 0$, $L(-x) = L(x)$ によって自然に整数 $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$ 上に拡張できる。 $L(0)$ については、 $L(0) = \infty$ とでも定義しておけば、 $\mathbf{Z}$ 上での定義となる。したがって、 $\frac{x}{y} \in \mathbf{Q}$ に対して、 $L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$ とすれば、 $\mathbf{Q}$ への自然な拡張となる。すなわち

命題9. 定義1における L は有理数 $\mathbf{Q}$ 上に自然に拡張され、命題2の性質も引き継がれる。

が成立している。

この L は (Euler関数 φ の世界を離れてしまうが) 命題2の性質を保ったままで、実数 $\mathbf{R}$ や $\mathbf{Q}$ に $\sqrt{-1}$ を付加した数体 $\mathbf{Q}[\sqrt{-1}]$ 、複素数 $\mathbf{C}$ に拡張できるであろうか。命題2の性質を仮定した上で計算をしてみよう。

無理数でいくつか計算をしてみると、

$$\begin{aligned} \cdot L(\sqrt{2}) &= L(2^{1/2}) = \frac{1}{2}L(2) = \frac{1}{2} \\ \cdot L\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= L(2^{-1/2}) = -\frac{1}{2}L(2) = -\frac{1}{2} \\ \cdot L(2^{\sqrt{2}}) &= \sqrt{2}L(2) = \sqrt{2} \\ \cdot L(2^\pi) &= \pi L(2) = \pi \end{aligned}$$

この様子を観察すると、 L が $\mathbf{R}$ 上でもwell-definedであるためには、値域としては少なくとも $\mathbf{R}$ でなければならない。

また、続けて $\mathbf{C}$ 上でも観察をしてみよう。

$$\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad (n \in \mathbf{N}) \text{ とすれば}$$

$$nL(\omega) = L(\omega^n) = L(1) = 0 \text{ より } L(\omega) = 0$$

また、 $\zeta = \cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha$ とし、 β を $\alpha\beta = 2\pi$ となるようにとれば

$$\beta L(\zeta) = L(\zeta^\beta) = L(1) = 0 \text{ より } L(\zeta) = 0$$

すると、複素平面での単位円周上の点 w について $L(w) = 0$ となり、任意の $\mathbf{C}$ の元 z については $z = |z|w$ の形をしていることから

$$L(z) = L(|z|w) = L(|z|) + L(w) = L(|z|)$$

を得る。

しかし、 L が $\mathbf{Q}$ から $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ (超越数の扱いを含

め) well-definedに接続／拡張できるかどうかについては課題として残る。

3 導来対数関数 L についての abc 予想

3.1 L についての abc 予想について

この L に関して、我々はEuler関数の導来対数関数 L に関する abc 予想 (L 版 abc 予想) を提出している。

予想. (Yamashita-Miyata 2015)

$$a, b, c \text{ が互いに素な自然数で } a + b = c \text{ を満たすとき} \\ \max\{L(a), L(b), L(c)\} < 2 \cdot L(\text{rad}(abc))$$

が成り立つ。

この予想については、計算機実験によって $c < 2^{30}$ までについては正しいことを確認し (宮田-山下 2017)、また次の結果も得ている。

定理10. (Yamashita-Miyata 2015) a, b, c が互いに素な自然数で $a + b = c$, $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(c)$ を満たすとき

$$\max\{L(a), L(b), L(c)\} < 2 \cdot L(\text{rad}(abc))$$

が成立する。

この定理10の条件、 $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(c)$ の条件が成立する (a, b, c) をprimitive φ -tripleと呼ぶが (宮田-山下 2017)、primitive φ -tripleの成立状況については、山下-宮田が議論し、無限に多く存在すると予想され、 c の偶奇によって、primitive φ -tripleの存在確率が大きく異なることもわかっている (山下-宮田 2017)。

3.2 primitive φ -triple以外の場合

定理10ではprimitive φ -tripleの場合に我々の予想が正しいことについて主張した (Yamashita-Miyata 2015) が、primitive φ -tripleでない場合はどうであろうか。

互いに素な p, q で

$$\frac{q}{p} = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{\varphi(c)}$$

であるとしよう。このとき、次の定理が成立する。

定理11. a, b, c が互いに素な自然数で $a + b = c > 2$ を満たすとき、次の条件 (*) が成立していれば

$$(*) \max(L(p), L(q)) \leq (2 - \log_2 3) L(\text{rad}(abc)) \\ \max\{L(a), L(b), L(c)\} < 2 \cdot L(\text{rad}(abc))$$

が成立する。

証明. $a + b = c$ と $p\varphi(a) + p\varphi(b) = q\varphi(c)$ を連立させて

$$ac\left(q\frac{\varphi(c)}{c} - p\frac{\varphi(a)}{a}\right) = bc\left(p\frac{\varphi(b)}{b} - q\frac{\varphi(c)}{c}\right)$$

を得る。ここで

$$q \frac{\varphi(c)}{c} - p \frac{\varphi(a)}{a} = 0$$

とすると

$$aq\varphi(c) = cp\varphi(a) = (a+b)\varphi(a)$$

一方、 $q\varphi(c) = p\varphi(a) + p\varphi(b)$ より

$$(\#1) \quad a\varphi(b) = b\varphi(a)$$

となるが、 $(a, b) = 1$ より $a \mid \varphi(a)$ が必要となり、 $a = 1$ でなければならない。ところが、 $a = 1$ であれば $(\#1)$ より、 $\varphi(b) = b$ 、よって $b = 1$ となり、 $2 < c = a + b = 1 + 1 = 2$ に矛盾する。よって

$$q \frac{\varphi(c)}{c} - p \frac{\varphi(a)}{a} \neq 0$$

である。これより

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{p \frac{\varphi(b)}{b} - q \frac{\varphi(c)}{c}}{q \frac{\varphi(c)}{c} - p \frac{\varphi(a)}{a}} \\ &= \frac{\text{rad}(abc) \left(p \frac{\varphi(b)}{b} - q \frac{\varphi(c)}{c} \right)}{\text{rad}(abc) \left(q \frac{\varphi(c)}{c} - p \frac{\varphi(a)}{a} \right)} \\ &= \frac{p \left(\text{rad}(abc) \frac{\varphi(b)}{b} \right) - q \left(\text{rad}(abc) \frac{\varphi(c)}{c} \right)}{q \left(\text{rad}(abc) \frac{\varphi(c)}{c} \right) - p \left(\text{rad}(abc) \frac{\varphi(a)}{a} \right)} \end{aligned}$$

ここで、 $k = a, b, c$ として

$$\text{rad}(abc) \frac{\varphi(k)}{k} \in \mathbf{N}$$

であることに注意すれば、(以下、 $\text{rad}(abc)$ を rad^* で表記する。)

$$a \mid p \left(\text{rad}^* \frac{\varphi(b)}{b} \right) - q \left(\text{rad}^* \frac{\varphi(c)}{c} \right)$$

である。したがって

$$L(a) \leq L \left(p \left(\text{rad}^* \frac{\varphi(b)}{b} \right) - q \left(\text{rad}^* \frac{\varphi(c)}{c} \right) \right)$$

ここで、 L の定義域を $\mathbf{Q}$ に拡大し、 $k = a, b, c$ で

$$L \left(\frac{\varphi(k)}{k} \right) = \begin{cases} -1 & (k: \text{偶数}) \\ 0 & (k: \text{奇数}) \end{cases}$$

に注意し、命題7 (E4) を用いれば上式の右辺は

$$L \left(p \left(\text{rad}^* \frac{\varphi(b)}{b} \right) - q \left(\text{rad}^* \frac{\varphi(c)}{c} \right) \right)$$

簡単のため、 $\text{rad}^* \frac{\varphi(k)}{b} = C(k) \quad (k = a, b, c)$ と記すと

$$\begin{aligned} L(a) &\leq \log_2 3 \cdot \max(L(pC(b)), L(qC(c))) \\ &\leq \log_2 3 \left(\left(\frac{2}{\log_2 3} - 1 \right) L(\text{rad}^*) + \max(L(C(b)), L(C(c))) \right) \\ &\leq \log_2 3 \left(\left(\frac{2}{\log_2 3} - 1 \right) L(\text{rad}^*) + L(\text{rad}^*) \right) \\ &= 2L(\text{rad}^*) = 2L(\text{rad}(abc)) \end{aligned}$$

primitive φ -tripleの場合は、 $L(p) = L(q) = L(1) = 0$ であることから、定理11の条件を満足し、系として得られることがわかる。

系12. (定理10) primitive φ -tripleであれば、

$$\max \{L(a), L(b), L(c)\} < 2 \cdot L(\text{rad}(abc))$$

が成立する。

4 予想の検証について

4.1 $c \leq N = 10^{10}$ での検証の困難さ

我々の予想については、計算機実験によって $c < 2^{30}$ までについて予想が正しいことを確認しているが (宮田-山下 2017)、 $c \geq 2^{30}$ 以上については一般的なパソコン環境では困難である。

一般に x に対して $\varphi(x)$ を求める問題はRSA-Problemと呼ばれ、 $\varphi(x)$ が簡単に求められればRSA公開鍵暗号問題は終了する一非常な難問とされている。

$L(x)$ を計算するには $\varphi(x)$ を繰り返し計算する必要があるため、 $L(x)$ を求めることはRSA-Problem以上の困難さを伴う。

一方、 $x \leq N$ となるすべての x について $L(x)$ を求めるなら、時間計算量 $O(N \log \log N)$ でできることがわかっている (宮田-山下 2016)。この方法を使えば1個あたり $O(\log \log N)$ で $L(x)$ を求めることができる。

しかしながら、その方法では $O(N)$ の記憶領域が必要であり $N = 10^9$ のときに4GBのメモリが必要となる。

同じ方法で $N = 10^{10}$ を実行するには (扱う整数が32bitを超えるので、64bit 整数型を使った場合) 80GBのメモリが必要となり、一般的なPCでは実行不可能である。

以下、 $(1, b, c)$ に対し、 $c \leq N = 10^{10}$ での検証を行い、検証結果は表1に示す。表中の $q(1, b, c)$ は $(1, b, c)$ の質と呼ぶ。

$$q(1, b, c) = \frac{L(c)}{L(\text{rad}(bc))}$$

を表し、検証環境は次の通りである。

- PC : Acer Veriton X4620G
- OS : Windows 8.1 Pro
- CPU : Intel Core i5-3340 CPU (3.10GHz)

- RAM : 12.0GB
- Language : Java 9.0.1 (64-bit) Java (TM) SE Development Kit 9.0.1 (64-bit)
- Software : Eclipse

実行時間 : 36分54秒

4.2 (1, b, c) に対する $c < 10^{10}$ での検証

4.2.1 memoization

(1, b, c) での検証では宮田・山下 (2016) の方法を使って、 $x \leq 10^8$ について、 $L(x)$ および $L(\text{rad}(x))$ を予め計算し、必要なときに参照できるようにmemoization (メモ化) した。これに必要な記憶領域は約800MBである。

$x > 10^8$ で $L(x)$ を求めるときは、試割による素因数分解を行い $\varphi(x)$ を求め、 10^8 より小さくなった時点でメモを参照できるようにし、 $x > 10^8$ のときには、なるだけ $L(x)$ を評価しないこととした。

4.2.2 c の最大素因数を求める

検証アルゴリズムでは、 $S = 10^6$ として、 10^{10} を大きさ S の区間に分割して計算を行った。

例えば k 番目の区間では、 $c = kS + 1, kS + 2, \dots, (k + 1)S$ について計算を行うが、segmented sieve というアルゴリズムを用いて、各 c の最大の素因数を求めた。

この計算量は $S \leq \sqrt{N}$ なら、 $O(S \log N)$ で済む (i.e., 1 個あたり $O(\log N)$)。また、記憶領域は $O(S)$ である (実際には $16S$ バイト = 16MB 必要)。

c の最大の素因数を p , $c = xp$ とする。もし $p < 10^8$ であれば $L(c)$ と $L(\text{rad}(c))$ は高速に計算できる。

なぜなら、 $p > 100$ なら $x < 10^8$ なので、 $L(c) = L(x) + L(p)$ で $L(x)$ も $L(p)$ もメモを参照するだけですむ。

一方 $p > 100$ なら、 c は 100 未満の小さな素数の積だけでできているので高速に素因数分解できる。

4.3 (1, b, c)-triple の判定

定義13. $1 + b = c$ のとき

$$\frac{L(c)}{L(\text{rad}(abc))} \geq 1.25$$

を満たす自然数 (1, b, c) の組を (1, b, c)-triple と呼ぶ。

本検証では、各 c について、

$$\frac{L(c)}{L(\text{rad}(p-1)) + L(\text{rad}(c))} \geq 1.25$$

かどうかを判定するが、 c の最大素因数を p , $c - 1$ の最大素因数を q として次のように判定を行う。

4.3.1 $p \geq 10^8$ のとき

もし $c = p$ なら、 $L(p) / (L(\text{rad}(c - 1)) + L(p)) < 1$ である。 $c = xp$ なら、 $1 < x < 100$ なので、

$$\begin{aligned} & \frac{L(c)}{L(\text{rad}(c-1)) + L(\text{rad}(c))} \\ & \leq \frac{L(x) + L(p)}{2 + L(p)} \\ & = 1 + \frac{-2 + L(x)}{2 + L(p)} \\ & \leq 1 + \frac{-2 + \log_2 10^2}{2 + \log_3 10^8} < 1.248 \end{aligned}$$

である。

したがって、この場合は (1, c - 1, c) は triple にならない。

4.3.2 $p < 10^8, q < 10^8$ のとき

この場合は、 $L(c)$, $L(\text{rad}(c))$, $L(c - 1)$, $L(\text{rad}(c - 1))$ が高速に計算できるので、

$$\frac{L(c)}{L(\text{rad}(c-1)) + L(\text{rad}(c))}$$

を実際に計算し、1.25 以上になるかどうか調べればよい。

4.3.3 $p < 10^8, q \geq 10^8$ のとき

$L(q) \geq \log_3 10^8$ なので、まずは

$$\frac{L(c)}{L(\text{rad}(c)) + 1 + \log_3 10^8}$$

を求めて、これが 1.25 以上なら triple にはならないと判定する。

そうでなければ、素因数分解しながら、 $L(c - 1)$ と $L(\text{rad}(c - 1))$ を計算し、

$$\frac{L(c)}{L(\text{rad}(c-1)) + L(\text{rad}(c))} \geq 1.25$$

かどうか判定する。

ちなみに、素因数分解して $L(c - 1)$ と $L(\text{rad}(c - 1))$ を計算しなければならないような場合は $c \leq 10^{10}$ のうち数百回であった。その内 1.25 以上になったものは 0 回であった。

4.3.4 閾値 1.25 の理由

検証アルゴリズムで篩った閾値を 1.25 にした理由は 3 つある。

理由 1 : 閾値を小さくすると、該当する triple が多くなりすぎるからである。また、小さい triple にはあまり興味がないということもある。

理由 2 : 我々の予想は

$$\frac{\max\{L(c-1), L(c)\}}{L(\text{rad}(c-1)) + L(\text{rad}(c))} < 2$$

であるが、今回の列挙は

$$\frac{L(c)}{L(\text{rad}(c-1)) + L(\text{rad}(c))} \geq 1.25$$

である。

もし、

$$\frac{\max\{L(c-1), L(c)\}}{L(\text{rad}(c-1)) + L(\text{rad}(c))} \geq 2$$

となる c があれば、

$$\frac{L(c)}{L(\text{rad}(c-1)) + L(\text{rad}(c))} \geq 2 \log_3 2 > 1.26$$

となるので、必ず、今回の列挙中に含まれることになる。閾値を1.25にしておけば、予想の反例がないことを確認することが可能である。

理由3：現実的な理由であるが、今回の検証は普通のスペックのパソコンで実行できる範囲としたかったことから、 10^8 以下をmemoizationした (10^9 は少し高性能なパソコンでないと実行するには無理である)。

5 まとめと今後の課題

今回の研究では、 $L(x)$ の定義域拡張性について検討し、primitive φ -tripleでの結果をさらに改良し、primitive φ -triple以外でも、ある条件をさえ満足すれば我々の予想が成立することを示した。

予想の検証という点では、 $(1, b, c)$ に的を絞り、 $c \leq 10^{10}$ に対し予想が正しいことを検証した。

今後の課題としては、予想成立の証明は勿論のこと、一方で予想の検証も必要であり、当面は $c \leq N$ なる N を更に上げていくことになるが、

- $(1, b, c)$ の場合において、4.3.1節の不等式の評価精度をあげ、篩い閾値を1.248より下げる
- 定理11の不等式条件を、検証アルゴリズムへ最適に採用する

が挙げられよう。

参考文献

藤田菜摘-宮田大輔-山下倫範, 山下-宮田予想における $(1, b, c)$ -tripleの列挙について, 2017年度国際ICT利用研究学会全国大会講演論文集, D2-5, IIARS, 2017.12.09, 192-196
Miyata D. -Yamashita M., *A generalization of Yamashita's*

note on derived logarithmic functions of Euler functions, 2001.12.14

Miyata D. -Yamasita M., *Note on derived logarithmic functions of Euler's functions, Proceedings of Autum meeting (App. Math.)*, Math. Soc. of Japan, 2004.9 (in Japanese)

宮田大輔-山下倫範-友永昌治, 拡張オイラー関数から導来する完全対数関数について, 文部科学省・特色ある大学教育支援プログラム研究集会 (高知工科大学採択分), 高知工科大学, 2004.10.23

宮田大輔-山下倫範, *Euler関数導来対数的関数におけるabc-tripleの列挙*, 2015年度パーソナルコンピュータ利用技術学会第1回合同研究会「数理科学とコンピュータ」, パーソナルコンピュータ利用技術学会, 立正大学, 2016.3.18, JPCATS研究報告「数理科学とコンピュータ」Vol. 3 E-ISSN 2188-1685, 23-24

宮田大輔-山下倫範, *Euler関数導来対数的関数のabc-tripleの高速列挙アルゴリズム*, 国際ICT利用研究学会論文誌, 第1巻第1号, 国際ICT利用研究学会, 111-116 (2017.6.30)

Murányi, Aladár., *Az Euler-félé φ -függvény iterálásával nyert számelméleti függvényről*, Mat. Lapok 11 (1960), 47-67

Pillai Sivasankaranarayana S., *On some functions connected with $\varphi(n)$* , Bull. Amer. Soc., 35, 6 (1929), 832-836

Pillai Sivasankaranarayana S., *On a function connected with $\varphi(n)$* , Bull. Amer. Soc., 35, 6 (1929), 837-841

Prasad, V. Siva Rama-Rangamma M. -Fonseca Phil., *On functions arising from generalized Euler functions*, Indian J. pure appl. Math., 18 (10), (1987), 941-946

Shapiro, H., *An arithmetic function arising from the φ function*, Amer. Math. Monthly, 50 (1943), 18-30

Shapiro, Harold N., *Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons, New York et al., (1983) [3. Arithmetic Functions §3.7 The Euler Function. Exercise] 17 (77-78)]

Uchiyama, S. → Yamashita, M.: Re: On a derived logarithmic function of an Euler function, 1977.9.12 (private communication)

Yamashita M. *On the Euler's function*, 1971.12.23

Yamashita, M. → Uchiyama, S.: On a derived logarithmic function of an Euler function, 1977.9.10 (private communication, Uchiyama, S. = Uchiyama, Saburo [Prof. Univ. of Tsukuba])

山下倫範-宮田大輔, $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(c)$ の成立状況とEuler関数導来対数関数のabc予想, 2016年度第1回国際ICT利用研究学会研究会講演論文集 (On Line edition: ISSN 2432-7956), 国際ICT利用研究学会, 立正大学品川キャンパス, S3-4, 2017.3.12

Yamashita M.-Miyata D., *On the abc conjecture for a derived logarithmic function of the Euler function*, Proceedings of 1st CCATS2015 IEEE (International Conference on Computer Application & Technologies 2015), Session 7 (9.2), Kunibiki Messe (Matsue), 2015.8.31-9.2

表 1 : 計算結果

b	c	$q \ (1, b, c)$	b	c	$q \ (1, b, c)$
$2 \cdot 3^7$	$5^4 \cdot 7$	1.667	$5 \cdot 139^3$	$2^7 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 17^2$	1.294
$19 \cdot 509^3$	$2^{19} \cdot 3^4 \cdot 59$	1.647	$2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^4$	4801^2	1.294
$3 \cdot 5^5 \cdot 47^2$	$2^{18} \cdot 79$	1.643	$2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^4 \cdot 7$	$13^2 \cdot 673^2$	1.294
$3^9 \cdot 7^2 \cdot 197$	$2^7 \cdot 5^7 \cdot 19$	1.6	$2 \cdot 3 \cdot 281^3$	$7^5 \cdot 89^2$	1.294
$3^{16} \cdot 7$	$2^3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 53^3$	1.563	$3 \cdot 157 \cdot 3323^2$	$2^{25} \cdot 5 \cdot 31$	1.292
$2^4 \cdot 3^7 \cdot 547$	$5^8 \cdot 7^2$	1.538	$3^5 \cdot 5$	$2^6 \cdot 19$	1.286
$3^2 \cdot 7$	2^6	1.5	$3^7 \cdot 13 \cdot 17$	$2^{13} \cdot 59$	1.286
$3^3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 73$	2^{18}	1.5	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 127$	19^6	1.286
$11^4 \cdot 47$	$2^{15} \cdot 3 \cdot 7$	1.5	$3^6 \cdot 5^3 \cdot 4003$	$2^{17} \cdot 11^2 \cdot 23$	1.286
$2^{11} \cdot 3^3 \cdot 19$	$5^4 \cdot 41^2$	1.5	$3^{14} \cdot 311$	$2^{15} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1297$	1.286
$5^4 \cdot 367$	$2^{15} \cdot 7$	1.417	$3^6 \cdot 5 \cdot 493291$	$2^{18} \cdot 19^3$	1.286
$31 \cdot 127^2$	$2^5 \cdot 5^6$	1.417	$2^{10} \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 43 \cdot 1321$	257^4	1.28
$7^2 \cdot 127 \cdot 337$	2^{21}	1.4	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 41761$	17^8	1.28
$2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13^4 \cdot 17$	239^4	1.4	$23^2 \cdot 109 \cdot 491$	$2^{20} \cdot 3^3$	1.278
$3^7 \cdot 13 \cdot 23^2$	$2^9 \cdot 5^4 \cdot 47$	1.375	$3 \cdot 43 \cdot 127$	2^{14}	1.273
$7^2 \cdot 43^4$	$2 \cdot 5^4 \cdot 13^3 \cdot 61$	1.353	$3^5 \cdot 5 \cdot 7^2$	$2^4 \cdot 61^2$	1.273
$5^4 \cdot 19 \cdot 15541$	$2^{24} \cdot 11$	1.35	$2 \cdot 3^3 \cdot 11^3$	$5^5 \cdot 23$	1.273
$3^{13} \cdot 1277$	$2^3 \cdot 19^2 \cdot 89^3$	1.35	$7^2 \cdot 17^3 \cdot 2143$	$2^{22} \cdot 3 \cdot 41$	1.273
$2^3 \cdot 7^5 \cdot 13^2 \cdot 109$	$3^3 \cdot 11^3 \cdot 41^3$	1.35	$47^3 \cdot 53 \cdot 109$	$2^{22} \cdot 11 \cdot 13$	1.273
$2^5 \cdot 3^2$	17^2	1.333	$19 \cdot 37^3 \cdot 937$	$2^{22} \cdot 5 \cdot 43$	1.273
$2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$	7^4	1.333	$5^3 \cdot 71^2 \cdot 2971$	$2^{17} \cdot 3^3 \cdot 23^2$	1.273
$3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	2^{12}	1.333	$13^3 \cdot 43 \cdot 163^2$	$2^7 \cdot 5^7 \cdot 251$	1.273
$3^4 \cdot 79$	$2^8 \cdot 5^2$	1.333	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 17^2 \cdot 109$	251^4	1.273
$5 \cdot 11^3$	$2^9 \cdot 13$	1.333	524287	2^{19}	1.267
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 29$	17^4	1.333	$3 \cdot 7^3 \cdot 11^3$	$2^9 \cdot 5^2 \cdot 107$	1.267
$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29^2$	41^4	1.333	$3^4 \cdot 37 \cdot 79 \cdot 173$	$2^{16} \cdot 5^4$	1.263
$5^3 \cdot 7^4 \cdot 11$	$2^{13} \cdot 13 \cdot 31$	1.333	$3^8 \cdot 7 \cdot 937$	$2^{10} \cdot 5^2 \cdot 41^2$	1.263
$7^4 \cdot 2399$	$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^4$	1.333	$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 317$	$2^{18} \cdot 13^2$	1.263
$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 307$	17^6	1.333	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 79$	23^6	1.263
$3^7 \cdot 53 \cdot 131^2$	$2^{20} \cdot 7 \cdot 271$	1.333	$3^6 \cdot 17^3 \cdot 71$	$2^{12} \cdot 7^3 \cdot 181$	1.263
$3^9 \cdot 5^4 \cdot 709$	$2^6 \cdot 53 \cdot 137^3$	1.333	$3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 5779$	$2^{22} \cdot 11 \cdot 29$	1.261
$2^6 \cdot 3^{10} \cdot 331$	$17^5 \cdot 881$	1.318	$2^{14} \cdot 7^4 \cdot 13^2$	$17^3 \cdot 29^2 \cdot 1609$	1.261
$7^2 \cdot 71^2 \cdot 223$	$2^{15} \cdot 41^2$	1.316	19^3	$2^2 \cdot 5 \cdot 7^3$	1.25
$2^{14} \cdot 8111$	$3^5 \cdot 5^7 \cdot 7$	1.313	$3^4 \cdot 7 \cdot 11^2$	$2^{10} \cdot 67$	1.25
$7^3 \cdot 487$	$2 \cdot 17^4$	1.308	$3^5 \cdot 643$	$2 \cdot 5^7$	1.25
$7^2 \cdot 13^2 \cdot 186391$	$2^{26} \cdot 23$	1.304	$5 \cdot 7^4 \cdot 19$	$2^8 \cdot 3^4 \cdot 11$	1.25
$19^3 \cdot 23^2 \cdot 1613$	$2^{19} \cdot 3 \cdot 61^2$	1.304	$3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 41$	2^{20}	1.25
$2^{12} \cdot 5^3$	$3^5 \cdot 7^2 \cdot 43$	1.3	$5 \cdot 29 \cdot 47^3$	$2^9 \cdot 3^5 \cdot 11^2$	1.25
$31^3 \cdot 79^2$	$2^{16} \cdot 2837$	1.3	$2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 29$	$3^8 \cdot 11^4$	1.25
$3^7 \cdot 11 \cdot 19^2 \cdot 31$	$2^{18} \cdot 13 \cdot 79$	1.3	$5^9 \cdot 163$	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 23 \cdot 179^2$	1.25
$3^2 \cdot 7^3 \cdot 19^4$	$2^{13} \cdot 49109$	1.3	$3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 151 \cdot 331$	2^{30}	1.25
$7^4 \cdot 13 \cdot 23^2 \cdot 59$	$2^4 \cdot 3^6 \cdot 17^4$	1.3	$3^8 \cdot 13^2 \cdot 2311$	$2^{18} \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 23$	1.25
			$2^2 \cdot 5^4 \cdot 17^3 \cdot 211$	$3^3 \cdot 7^3 \cdot 23^4$	1.25

On the *abc* conjecture for a derived logarithmic function L of the Euler function φ and its computer verification

YAMASHITA Michinori*, MIYATA Daisuke**, FUJITA Natsumi**

* Faculty of Geo-environmental Science, Rissho University

** Faculty of Commerce and Economics, Chiba University of Commerce

resume:

We show some properties related to the derived logarithmic function L of the Euler function φ and verify empirically the truth of the *abc* conjecture for L for all positive integers c up to 10^{10} in case of $a = 1$. The algorithm used in the verification effort reported in this paper is described in detail in section 4.

Key words: derived logarithmic functions L of the Euler function φ , *abc* conjecture, computer experimental verification, primitive φ -triple