

立正大学環境システム学科において 最近15年間に実践されたコリオリ力の異なる教授法の比較

中 川 清 隆*

キーワード：コリオリ力, 異なる教授法, 幾何学的方法, 微分学的方法, 座標変換, 絶対角運動量保存則

I. はじめに

前報(中川 2015a)で記載した如く, 角速度 Ω [rad/s]で反時計回りに自転している地球の北緯 φ [rad]における地平面において相対速度 v [m/s]で水平移動する物体は, 1秒後には当初の目的地より方向が右に $\Omega \sin \varphi$ [rad], 距離が右に $v \Omega \sin \varphi$ [m]偏った地点に到達し, しかもその進行方向は当初の進行方向より右に $2\Omega \sin \varphi$ [rad]偏ることが知られており, この偏りdeflectionは発見者の名前にちなんでコリオリ効果Coriolis effectと呼ばれ, コリオリ効果の原因となる力はコリオリ力Coriolis forceと呼ばれる(American Meteorological Society 2012). しかしながら, コリオリ効果とコリオリ力を同等に扱うことも一般的に行われている(American Meteorological Society 2000). 本稿では, American Meteorological Society (2012) および中川 (2015a, b)と同様の観点から, コリオリ効果とコリオリ力を区別して使用する.

現代の気象学では, 地球の空気塊に作用する有効な力は, 気圧傾度力, 重力, 摩擦力, コリオリ力の4力であることが特定されている. このうち重力は, 我々の空間認識における根本的基準となっており(例えば, 吉田ほか 2005), 我々は重力に沿って鉛直方向, 即ち z 軸を決め, 重力に垂直な平面として水平面 $O-xy$ 面を決定し, この $O-xy$ 面上真東方向に x 軸, 真北方向に y 軸を設けている. 地平面は大気層の下端を限る代表的な水平面の一つである. この事実により, 重力は鉛直 z 軸方向にしか作用しない, という極めて重要な自然法則が存在することとなり, 重力に対して垂直な水平面上の空気塊の運動に作用する有効な力は, 気圧傾度力, 摩擦力, コリオリ力の3力に限定される. 通常, 摩擦力は地表近傍以外の空気塊には作用し難いので, 地表面から充分離れた, いわゆる自由大気における水平方向の空気塊の運動状態の変化は, 気圧傾度力とコリオリ力の2力のみによって

定まることになる. 例え極めて小さくとも, ほかに作用する力が存在しなければ, その小さな力が大気の運動の基本的な特徴を決定することになるため, 気象学の授業においては, 気圧傾度力とコリオリ力は重力に次いで認識させねばならない重要な力となっている.

筆者は昭和59(1984)年度から, 教員養成系学部理科学分野において21年間, 環境系学部環境気象分野において15年間, 計36年間, 気象学の概論科目の講義を継続して担当してきた. その講義の際に学生の理解が定着し難いことを痛感してきた概念の一つに, 地球の自転に伴う慣性力の一つであるコリオリ力がある. 日本気象学会においても, 気象教育におけるコリオリ力の重要性が認識されており, 例えば, 日本気象学会機関誌「天気」誌上においても種々の議論が重ねられてきた(寺田 1968; 高橋 1968; 木村 1973; 吉崎 2013; 中村 2013; 山岸 2013; 中島 2018ほか).

大気や海洋といった地球回転流体中に生じる諸現象の理解や予測において, 地球自転の影響により発生するコリオリ効果やその原因となるコリオリ力は, 避けて通れない重要なファクターである. このため, コリオリ効果やその原因となるコリオリ力は, 高校地学の教科内容でも必須の学習項目となっているが, 高校物理では扱わない難度の力学的内容を含むためコリオリ効果やコリオリ力の定量的教育は不可能と判断され, 平面回転盤を用いた実験によりコリオリ効果やコリオリ力の存在を理解させる指導が行われている(吉田ほか 1992, 横尾ほか 1995, 小林 2019).

コリオリ力は必須の学習課題とされながら, 高校や共通教育レベルの大学生が学習する科学概念の中では最も難しい概念の一つと認識され, 学生が数式による授業に拒絶反応を示す主因として, 微分学や積分学等の基礎的な数学が分からない場合と, 数学的な技法は一応理解できていても自然事象にそれを適用することの意味が分からない場合があることが指摘されている(池田 2005).

* 立正大学地球環境科学部・環境システム学科

筆者も同様の認識を有しており、40年近くに渡り、自らが担当する気象学の概論科目において、コリオリ力に関する教授法に種々の検討と工夫を重ねてきた。

筆者は、15年前の立正大学地球環境科学部環境システム学科環境気象学分野着任以降、毎年、

①「気象と水の科学」標準履修年次1年I期

②「基礎物理学」標準履修年次1年I期

③「気候・気象学」標準履修年次2年I期

の3科目において、異なる方法によるコリオリ力の講義を実践している。ただし、①「気象と水の科学」は平成25（2013）年度新設科目であるため、「気象と水の科学」だけは今年度で7年目である。本稿は、筆者が立正大学においてこれまで実践してきた①～③の3通りのコリオリ力の教授法を概観したうえでその教育上のメリット・デメリットをまとめることにより、それなりに気象教育に腐心してきた助手時代を含めると43年に及ぼうとする自らの教育者としてのアカデミックキャリアの総括を図るとともに、若い同僚の教育方法の糧となることを目的とする。

Ⅱ. 「気象と水の科学」におけるコリオリ力の指導実践

「気象と水の科学」は、平成25（2013）年度の履修コース編成変えとともに環境システム学科気象・水文コースに新たに開設された1年I期コース必修科目である。高等学校における数学および物理学の履修状態に大きな差異がある入学したての新入生に対して、自然科学から環境科学への橋渡しを図ることを目的として、気象や水文に関連した身近な地球環境問題を題材として、環境気象学分野の教員3名と環境水文学分野の教員3名が2回ずつ、および環境情報学分野の教員1名が3回担当する典型的なオムニバス形式の講義である。

筆者は環境気象学分野の先陣を切って第1回目と2回目を担当し、第2回目授業において、微分・積分学も物理学も殆ど素養がない大学入学直後の新入生を対象にした遠心力およびコリオリ力の指導を実践している。2019年度は4月16日（火）1限に実施した。

平面回転盤を用いるコリオリ力の指導は比較的盛んに行われているが、その多くは回転の中心から外縁部に向かって放出される物体の軌跡を観察させており、物体の軌跡が曲線（回転の中心の極近傍では円）を描くこと、イクオール、コリオリ効果そのもの、という論調になっている。高橋（1968）は、読者はこの論理を理解しても、回転中心点以外の任意の点から放出された場合を理解す

ることは難しいことを指摘している。

聴講学生は、反時計回りの回転を行っている回転盤の中心を北極点とみなし、中緯度地方で生じる現象は回転盤の中心と外縁部の中ほどで発生するとみなす素朴概念を有している。実際には回転盤の中心が地平面上の任意の地点であることに注意が必要であるが、初心者である聴講学生にその理屈を理解させることは、コリオリ力を理解させることと同様に、結構困難なのが実態である。

上記の困難は、地平面上における物体の運動においては極点の周りの回転に伴う遠心力を考慮する必要は無いが、回転盤上における物体の運動においてはコリオリ力も当然作用するが遠心力も作用することに起因する。平面回転盤では遠心力を除去することは不可能であるため、回転盤の中心付近以外では、コリオリ力の効果のみを正確に再現することは不可能である。回転盤上で遠心力の効果を除去してコリオリ力のみの効果を検討するためには、平面ではなく回転放物面の回転盤を用いる必要がある。

「気象と水の科学」は平成25（2013）年度の開設以降7年間にわたり、同一の内容で実施されてきた。先ず回転運動の特徴について考察させる。図1のように、点Aにおいて、点Oを中心として反時計回りに角速度 ω [rad/s]で回転している平面回転盤上に静止している物体を考え、点Aは点Oから R [m]離れているとする。つまり物体は点Oを中心とし半径 R [m]の鉛直軸回りの回転運動をしている。平面回転盤を北極点を中心とする北半球地表面のモデルとみなす素朴誤謬が多いことを考

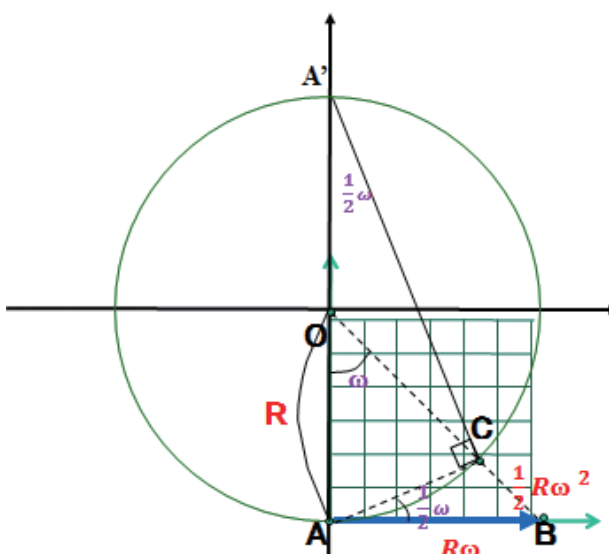


図1 原点Oから R [m]離れて回転運動している物体の点Aにおける接線速度と移動経路の関係を示す模式図（中川 2015a に加筆）

慮して、平面回転盤の角速度を地球の自転速度 Ω [rad/s]とは異なる記号 ω [rad/s]で表す。

この物体の点Aにおける接線速度を $\overrightarrow{AB}$ とし、速度ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の始点を点Aにおくと、終点Bは点Aにおける慣性運動によるこの物体の1秒後の目的地を意味する。回転している平面上の点Aにおける点Aの進行方向に x 軸をとり、回転の中心点Oの方向に y 軸をとってO- xy 座標系を設定する。

図1における点Aは点Oを中心とする円運動を行っているので、1秒後には点Oと点Bを結ぶ線分OBが点Oを中心とする半径 R [m]の円弧と交わる点Cに移動する。 $\angle AOC = \omega$ [rad/s]が物体の角速度であり、回転半径が R [m]なので、接線速度に相当する線分ABの長さは $R\omega$ [m]である。点Aの反対側の直径の端を点A'とすると $\angle AA'C$ は $\angle AOC$ の円周角なので、 $\angle AA'C = \frac{\omega}{2}$ である。

$\angle ACA' = \angle R$ で線分ABは点Aにおける接線なので、 $\angle BAC = \frac{\omega}{2}$ であり、即ち、

$$BC = R\omega \times \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}R\omega^2 \quad \text{eq. (1)}$$

となる。つまり、点Aにおいて距離 $R\omega$ [m]離れた点Bを目指していた点Oを中心とする等速円運動を行っている物体は、実際には、1秒後、点Bから点Oの方向に距離 $\frac{1}{2}R\omega^2$ [m]だけ移動した点Cに到達することになる。一定の加速度が1秒間生じた時の移動距離は加速度の $\frac{1}{2}$ となるのが等加速度運動の基本法則なので、1秒間

に移動した距離が $\frac{1}{2}R\omega^2$ [m]であるのでこの間に当該物体にはBCの方向に単位質量あたり $R\omega^2$ [N]の大きさの力が働いたことになる。この力は常に回転の中心Oに向かって作用するので、求心力または向心力と呼ばれ、英語ではともにcentripetal forceと記される。円運動している物体には必ず求心力が作用しており、求心力が作用しなくては円運動は起こらない、という基本原理が存在する。

以上は、回転盤の外から観察している場合に言えることである。もし、観察者が回転盤上の点Aに居たら、どんな観察結果になるだろうか？

点Aは角速度 ω [rad/s]で等速円運動しているので観測者は1秒後には点Cに到達する。点Aに居る時点での慣性運動の到達目標は点Bだったので、点Cの場所に到

達した観測者には本来の目的地である点Bに行かせようとする力が作用する。CBの距離は $\frac{1}{2}R\omega^2$ [m]であるから、

観測者には $\overrightarrow{CB}$ の方向に単位質量あたり $R\omega^2$ [N]の大きさの力が働くように感じる。この力は常に回転の中心Oから外向きに作用するので遠心力centrifugal forceと呼ばれる。この力は観測者が点Aで行っていた運動をそのまま継続しようとする慣性を生じさせる力なので慣性力inertial forceとも呼ばれる。遠心力は慣性力的一种である。点Aに存在する物体は慣性力を打ち消す大きさの求心力が作用すると円運動を行える、ということになる。

図2に示すように、点Aが点Cに移動したとき、 x 軸は点Cにおける接線CDの方向を向き、 y 軸は点Cから点Oの方向を向いている。接線CDが線分ABとなす角は接線の勾配に等しいので ω [rad]である。

聴講学生にはこの点Oを中心とする回転盤を地平面の模型と見立てる素朴概念が存在する。図3は、緯度 φ における鉛直回転および水平回転と地球および地軸との関係を示す概念図である。点Oを中心とする回転盤を地平面の模型と見立てる場合、点Oは地軸（赤矢印）と地平面の交点である極点を意味し、点Aは1秒後に点Cに移動することを地平面にいる物体（および人物）は一切不思議に感じず、回転の中心O（北）の方向に引っ張られたり回転の中心Oとは反対（南）の方向に放り出されるように感じることも一切なく、かつ、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ は $\overrightarrow{CD}$ に、ベクトル $\overrightarrow{AO}$ は $\overrightarrow{CO}$ に、それぞれ、反時計回りに ω [rad]だけ方向がズレているにもかかわらず、地平面にいる物体（および人物）は位置や方向が全く変化して

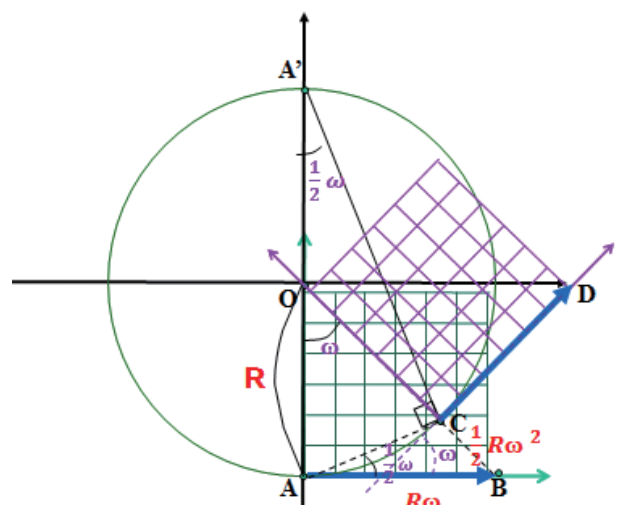


図2 回転運動により点Aが点Cに移動した時の、点Aおよび点Cにおける回転座標系の相互関係を示す概念図（中川 2015a に加筆）

いないと思っていることが重要である。

地平面は重力 g に垂直に形成される平面であり、地球と物体の間に作用する万有引力universal gravitation g_a は地球の中心に向かって作用するから、万有引力の地平面に沿った成分が存在する。物体に作用する万有引力 g_a の方向と重力 g の方向のずれを δ [rad]と表すと、万有引力の地平面に沿った成分の大きさは、およそ $\frac{GM}{R^2} \sin \delta$ と表される。これは、重力は万有引力と遠心力の合力であり、地平面は重力に垂直になるように形成されており、地球が真球ではなく回転楕円体となることに起因している（図4参照）。

重力 g は万有引力と遠心力の鉛直方向の成分の合力である、と表現することが可能である。緯度 φ [rad]の地平面は極方向に $\frac{R}{\tan \varphi}$ [m]の地点を中心として角速度 $\Omega \sin \varphi$ [rad/s]で回転しているため、図4の如く常に地平面に沿って赤道方向におおよそ $R\Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi$ [N]の

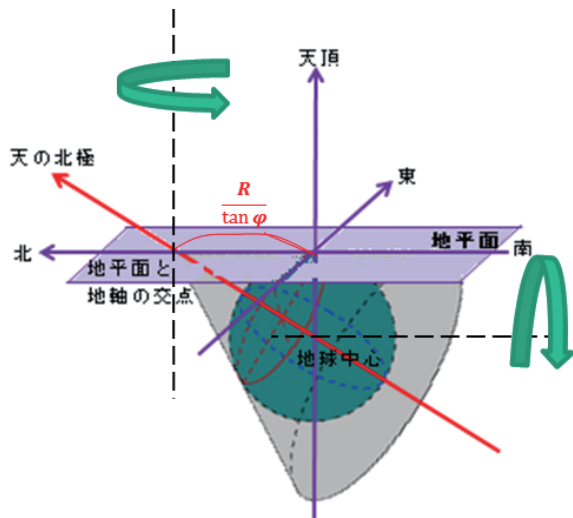


図3 緯度 φ における地平面の鉛直回転および水平回転と地球および地軸との関係を示す概念図

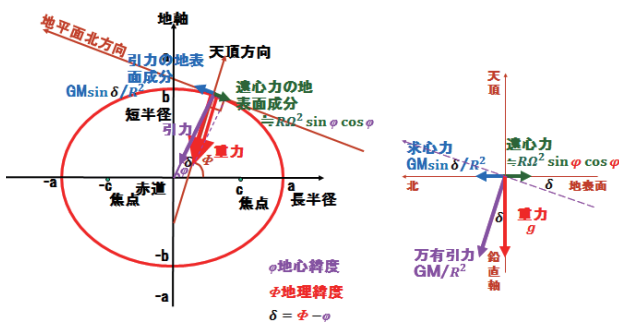


図4 （左）地球の子午面断面形と地表面および（右）重力、引力、遠心力と地表面の関係を示す模式図

遠心力を受けていることになる。万有引力と遠心力の地平面に平行な方向の合力はゼロであるため、

$$\frac{GM}{R^2} \sin \delta \cong R\Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \quad \text{eq. (2)}$$

が成り立つので、重力 g と万有引力 g_a の方向のズレ δ は

$$\delta \cong \sin^{-1} \frac{R^3 \Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi}{GM} \quad \text{eq. (3)}$$

と表せる。即ち、重力 g と万有引力 g_a の方向のズレ δ は中緯度（ $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ）で最大となり、赤道（ $\varphi = 0$ ）や極点

（ $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ）では $\delta = 0$ となり、重力 g の方向と万有引力 g_a の方向は一致する。

その結果、地平面の物体は地軸の周りを回転する運動を行っているにも係らず、地軸の方向、即ち北方向に求心力を受け、地軸とは反対方向、即ち南方向に遠心力を受けているとは感じない。従って、回転盤表面を地軸との交点を中心に回転している地平面のモデルとみなして教育にあたると、回転盤表面の運動には実際の地平面では関知し得ない遠心力の効果が現れてしまい、実験参加者に混乱を与える可能性があることに注意が必要である。

本授業では本当に回転盤上で実験を行う訳ではなく概念的に回転盤を用いるだけなので、回転盤の表面の物体が受ける回転盤表面に平行な求心力や遠心力は最初から考慮する必要がない。実際の地平面での現象を扱う際、重力を用いる場合には地表面に静止している物体が受ける地平面に平行な求心力や遠心力の効果は既に重力として考慮済であるので、考慮する必要がない。

回転の中心を地軸との交点と見立てた概念上の回転盤地平面モデルにおいて、西風に対するコリオリ力について考察する。図5の接線速度 $R\omega$ [m/s]で点Oの周りを等速円運動している地表面上の点Aの上に、地表面の接線速度 $R\omega$ [m/s]より u [m/s]だけ大きな速度 $R\omega + u$ [m/s]で地表面と同じ方向に進んでいる西風の空気塊を考える。地表面の1秒後の目的地が点Bなので、空気塊の1秒後の目的地はその u [m]前方の点Eである。1秒後、点Aは点Cに何の不思議もなく移動し、 $\overrightarrow{CG}$ の方向に接線速度 $R\omega$ [m/s]で進んでいる。観測者は点Aでは自分と同じ場所において東（ $\overrightarrow{AB}$ ）の方向に u [m/s]で進んでいた西風の空気塊は、1秒後には点Cの東（ $\overrightarrow{AB}$ の方向） u [m]先に進んでいると想定する。ところが、点Aに存在する単位質量の地表面と空気塊は全く同じ求心力を受けるので、点Bに向かって地表面が $\overrightarrow{BC}$ だけ

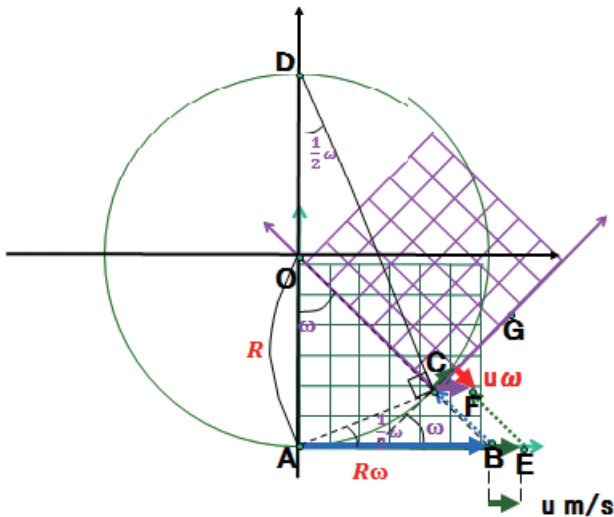


図5 接線方向の運動(西風 u [m/s] 吹走時)の場合(中川 2015a に加筆)

移動させられた求心力により点Eに向かっていった西風空気塊は $\overline{BC}$ に平行な $\overline{EF}$ だけ移動させられて点Cから u [m]離れた点Fに到達するので、観測者は驚く。点Fは $\overline{CG}$ の方向から右へ角度で ω [rad]、距離で $u\omega$ [m]ズレている。これは、観測者が想定している $\overline{CG}$ 方向の風速 u [m/s]の風が進行方向右90°の方向に $2u\omega$ [N]の力を受けた結果と考えることができる。即ち、これが西風 u に対するコリオリ力である。

同様に、今度は、概念上の回転盤地表面モデルにおいて、南風に対するコリオリ力について考察する。図6の接線速度 $R\omega$ [m/s]で点Oの周りを等速円運動している地表面上で、点Aから回転の中心Oに向かう風速 v [m/s]の南風の空気塊を考える。点Aの1秒後の目的地が点Bなので、空気塊の目的地は点Bから $\overline{AO}$ に平行な方向に v [m]離れた点Eである。1秒後、点Aは点Cに何の不思議もなく移動し、 $\overline{CG}$ の方向に接線速度 $R\omega$ [m/s]で進んでいる。観測者は点Aでは自分と同じ場所において回転の中心O（北）の方向に v [m/s]で進んでいた南風の空気塊は、1秒後には点Cの北（ $\overline{CO}$ の方向） v [m]先に進んでいると想定する。ところが、点Aに存在する単位質量の地表面と空気塊は全く同じ求心力を受けるので、点Bに向かっていった地表面が点Bから $\overline{BO}$ に平行な方向に BC だけ移動させられた求心力により点Eに向かっていった西風空気塊は点Eから $\overline{BC}$ に平行な方向に $\overline{EF}$ だけ移動させられて点Cから $\overline{AO}$ に平行な方向（ $\overline{CO}$ の方向から角度 ω [rad]の方向）に $v\omega$ [m]離れた点Fに到達するので、観測者は驚く。点Fは $\overline{CO}$ の方向から右へ角度で ω [rad]、距離で $v\omega$ [m]ズレている。これは、観測者が想定している $\overline{CO}$ 方向の風速 v [m/s]の南風が進行方

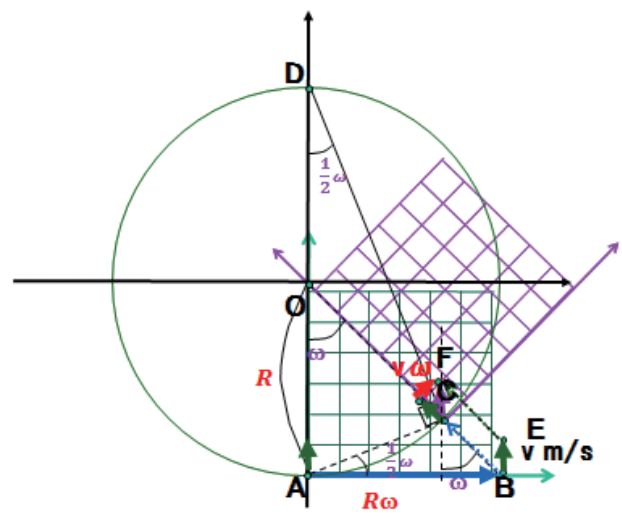


図6 動径方向の運動(南風 v [m/s] 吹走時)の場合(中川 2015a に加筆)

向右90°の方向に $2v\omega$ [N]の力を受けた結果と考えることができる。即ち、これが南風 v に対するコリオリ力である。

Ⅲ. 「基礎物理学」におけるコリオリ力の指導実践

「基礎物理学」は、環境システム学科1年I期の必修科目である。高等学校「物理」の履修状態に差異のある新入生に対して、質点の力学に絞って、ニュートンの運動の第2法則を理解してもらい、1年II期以降の環境諸科学の学習に際して最低限必要な概念や技能を修得してもらうことを目的としている。全15回の同授業の第13回目に円運動を扱っている。4月に前節に記載された「気象と水の科学」におけるコリオリ力の幾何学的指導を受けた1年生が主たる聴講者である。2019年度は7月11日（木）4限に実施した。

本時の前半において、極座標における動径方向と偏角方向の運動方程式を誘導し、動径一定として円運動の運動方程式、さらに、偏角方向の加速度0として等速円運動の運動方程式を導き、後半において、静止座標系と回転座標系の間の座標変換により、2つの慣性力「遠心力」と「コリオリ力」を導く構成としている。

ニュートンの運動の第2法則は、加速度が力に比例することを主張している。その加速度は $O-xy$ 座標系の座標成分の2階微分の組み合わせ $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$ として定義され、方向と大きさを持つベクトルとして認識される。このときの $O-xy$ 座標系が静止座標系乃至は慣性座標系を前提にしていることを理解・認識させることが肝要である。

古代エジプトで測量学が始まった当初から、 $O-xy$ 座標系は観測点を原点 O として地平面上に展開されるのが必然であったが、この観測点を原点とする $O-xy$ 座標系、いわゆる局所直交座標系は静止座標系であることが暗黙の了解、即ち素朴な概念であった。だからこそ、この座標系上で物体の座標成分が時間変化することとその物体の位置が時間変化することが同等という認識が生まれた。地平面上に展開される局所直交座標系が静止している、ということは、地平面が静止していることと同値であった。

ところが今日では、自転する地球の地平面は静止しておらず、地平面と地軸の交点を中心として回転していることが広く認識され、その地平面上に固定された局所直交座標系が回転座標系であることも自明となった。このため、局所直交回転座標系で取得された座標情報を慣性直交座標系上での座標情報に変換することが必須の作業となった。

今、図7のように、真の慣性直交座標系を $O-xy$ 座標系、角速度 ω [rad/s]の局所直交座標系を $O-x'y'$ 座標系としたとき、回転開始後の経過時間を t [s]とすると、両座標系のなす角は ωt [rad]なので、局所直交座標 (x', y') を慣性直交座標 (x, y) に変換するための関係式として

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \quad \text{eq. (4)}$$

$$y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \quad \text{eq. (5)}$$

が得られる。eq. (4) および eq. (5) の1階時間微分をとれば、慣性直交座標 (x, y) の時間変化 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ は局所直交座標 (x', y') を用いて

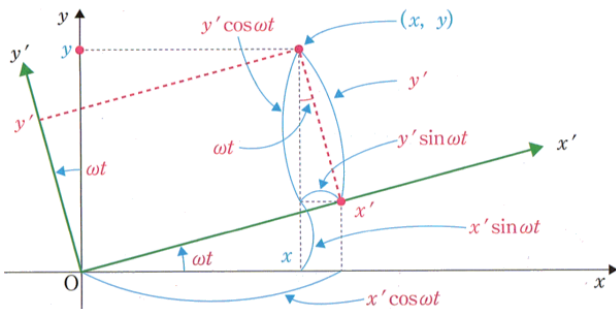


図7 慣性座標系 $O-xy$ と角速度 ω [rad/s]の回転座標系 $O-x'y'$ との関係を示す概念図（為近 2014 より）

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} \cos \omega t - x' \omega \sin \omega t - \frac{dy'}{dt} \sin \omega t - y' \omega \cos \omega t \quad \text{eq. (6)}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx'}{dt} \sin \omega t + x' \omega \cos \omega t + \frac{dy'}{dt} \cos \omega t - y' \omega \sin \omega t \quad \text{eq. (7)}$$

と表される。さらに eq. (6) および eq. (7) の1階時間微分、すなわち eq. (4) および eq. (5) の2階

微分をとれば、慣性直交座標 (x, y) の時間変化 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$

の時間変化 $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$ は局所直交座標 (x', y') を用いて

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} \cos \omega t - 2 \frac{dx'}{dt} \omega \sin \omega t - x' \omega^2 \cos \omega t - \frac{d^2y'}{dt^2} \sin \omega t \quad \text{eq. (8)}$$

$$- 2 \frac{dy'}{dt} \omega \cos \omega t + y' \omega^2 \sin \omega t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} \sin \omega t + 2 \frac{dx'}{dt} \omega \cos \omega t - x' \omega^2 \sin \omega t + \frac{d^2y'}{dt^2} \cos \omega t \quad \text{eq. (9)}$$

$$- 2 \frac{dy'}{dt} \omega \sin \omega t - y' \omega^2 \cos \omega t$$

と表される。

ニュートンの運動の第2法則は慣性直交座標 (x, y) の2階微分 $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$ を加速度と定義し、この加速度と力の間に運動方程式が成り立つと主張する。ところが、局所直交座標系 $O-x'y'$ を静止座標系 $O-xy$ と思い込んでいる立場では、局所直交座標 (x, y) の2階微分 $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$ を加速度として認識するので、認識される力と加速度との間には正常な運動方程式が成り立たないことになってしまう。

運動方程式を正常に成り立たせる真の加速度 $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$ は慣性直交座標系上のベクトルであるので、これを局所直交座標系上に変換すれば、局所直交座標系における真の加速度ベクトル (α_x, α_y) を求めることができる。即ち、

$$\alpha_x = \frac{d^2x}{dt^2} \cos \omega t + \frac{d^2y}{dt^2} \sin \omega t \quad \text{eq. (10)}$$

$$\alpha_{y'} = -\frac{d^2x}{dt^2}\sin\omega t + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\omega t \quad \text{eq. (11)}$$

を実行すれば良い。 $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$ はいずれも 6 項からなるの

で、 $\alpha_{x'}$, $\alpha_{y'}$ はいずれも 12 項からなる複雑な式となるが、
相殺する逆符号値や補数関係を利用して整理すると、

$\alpha_{x'}$, $\alpha_{y'}$ はともに 3 項からなる次式

$$\alpha_{x'} = \frac{d^2x'}{dt^2} - x'\omega^2 - 2\frac{dy'}{dt}\omega \quad \text{eq. (12)}$$

$$\alpha_{y'} = \frac{d^2y'}{dt^2} - y'\omega^2 + 2\frac{dx'}{dt}\omega \quad \text{eq. (13)}$$

が得られる。従って、 x' 軸方向および y' 軸方向の運動方程式は、それぞれ、

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} - mx'\omega^2 - 2m\frac{dy'}{dt}\omega = F_{x'} \quad \text{eq. (14)}$$

$$m\frac{d^2y'}{dt^2} - my'\omega^2 + 2m\frac{dx'}{dt}\omega = F_{y'} \quad \text{eq. (15)}$$

となる。両式右辺からなるベクトル $(F_{x'}, F_{y'})$ は局所直交座標系上における真の力ベクトルである。左辺の第

1 項からなるベクトル $(m\frac{d^2x'}{dt^2}, m\frac{d^2y'}{dt^2})$ は素朴に誤謬してしまう力ベクトルであり、第 2 項からなる力ベクトル $(-mx'\omega^2, -my'\omega^2)$ は原点からの変位に比例する原点方向への復元力ベクトルであり、第 3 項からなるベクトル $(-2m\frac{dy'}{dt}\omega, 2m\frac{dx'}{dt}\omega)$ は原点の周りの接線速度に比例する進行方向左 90° への力ベクトルである。

左辺の第 1 項からなる力ベクトル $(m\frac{d^2x'}{dt^2}, m\frac{d^2y'}{dt^2})$ が真の力ベクトル $(F_{x'}, F_{y'})$ ではないことは既に明らかであるが、気象学や海洋学等の地球流体力学においては、真の力ベクトルを求める努力をせず、左辺の第 2 項および第 3 項を右辺に移項して

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_{x'} + mx'\omega^2 + 2m\frac{dy'}{dt}\omega \quad \text{eq. (16)}$$

$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = F_{y'} + my'\omega^2 - 2m\frac{dx'}{dt}\omega \quad \text{eq. (17)}$$

を運動方程式とし、右辺第 2 項からなるベクトル $(mx'\omega^2, my'\omega^2)$ および第 3 項からなるベクトル $(2m\frac{dy'}{dt}\omega, -2m\frac{dx'}{dt}\omega)$ を実際には存在しないが存在しているとみなせる見かけの力と呼ぶ習慣が確立され、それぞれ、遠心力およびコリオリ力と呼ばれる。

この段階までくると、もはや、局所直交座標系が回転

座標系であることを意識する必要はなくなり、慣性直交座標系と局所直交座標系の区別を明記する必要もなくなるので、 x' および y' を x および y と表記し直し、運動方程式を

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x + mx\omega^2 + 2m\frac{dy}{dt}\omega \quad \text{eq. (18)}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y + my\omega^2 - 2m\frac{dx}{dt}\omega \quad \text{eq. (19)}$$

と記載することが行われている。真の力としては、地球との間の万有引力、気圧傾度力および摩擦力の 3 力のみが有効であることが確定しているが、万有引力と遠心力の合力を重力と認識し、真の力を重力、気圧傾度力および摩擦力の合力とみなすと、運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x + 2m\frac{dy}{dt}\omega \quad \text{eq. (20)}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y - 2m\frac{dx}{dt}\omega \quad \text{eq. (21)}$$

となり、地平面が回転していることにより生じる見かけの力はコリオリ力だけとなる。

2 つの慣性力「遠心力」と「コリオリ力」の誘導は、当該科目「基礎物理学」の教科書に指定している為近 (2014) にも 4 ページに渡って詳細に説明されている。小倉 (1978) 第 1 章 1.3 節「回転座標系とみかけの力」にも詳述されている。

IV. 「気候・気象学」におけるコリオリ力の指導実践

「気候・気象学」は環境システム学科気象・水文コース環境気象学分野 2 年 I 期の必修科目であり、その後学習する「大気大循環論」「総観気象学」「微気象学」「気候変動論」等において必須の基礎概念の修得を目指した気候学・気象学の概論を講じ、用語・概念の正確な理解と、その用語・概念を自在に用いて気候・気象現象を特徴付ける基本的なパラメータの値を求め当該現象について考察できる能力の育成を目指す科目である。大気の状態を示すために用いる変数とそれらの相互の関係について講義し、それから導かれる地球大気的基本的特徴について説明する。まず、静止乾燥空気を取り扱った後、乾燥空気の運動を取り扱っている。全 15 回の授業の第 8 回および第 9 回において、回転する地球-大気系中のベクトル運動方程式を誘導し、その過程で、コリオリの定理および遠心力やコリオリ力についても考究する。2019 年度は 7 月 11 日 (木) 2 限に実施した。

本時の大命題は、運動量保存則が地球大気中でも成り

立っていることである。運動量とは、質量 m に速度 $\boldsymbol{v}$ を掛けた物理量 $m\boldsymbol{v}$ である。質量 m はスカラー量であるが速度 $\boldsymbol{v}$ はベクトル量なので、運動量 $m\boldsymbol{v}$ はベクトル量である。運動量 $m\boldsymbol{v}$ には、外力 $\boldsymbol{F}$ が働かなければ運動量 $m\boldsymbol{v}$ は保存され、運動量 $m\boldsymbol{v}$ の変化は受けた外力 $\boldsymbol{F}$ に比例する、という法則があり、運動量保存の法則と呼ばれる。運動量保存の法則は、いわゆるニュートンの運動の第2法則のことである。

運動量保存の法則を、数式で表現すると、

$$\boldsymbol{F} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} \quad \text{eq. (22)}$$

であるが、気象学では、通常、単位質量 $m = 1 \text{ kg}$ の空気塊について議論するので、上式は、

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \quad \text{eq. (23)}$$

となる。つまり、外力と加速度は全く同等であり、単位質量の空気塊に外力 $\boldsymbol{F}$ が作用すると、風ベクトル $\boldsymbol{v}$ の方向あるいは大きさ、すなわち風向風速が変化する。

上式右辺の加速度 $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ やその基となっている速度 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ を決定するためには座標系を用いた物体の正確な位置 $\boldsymbol{x}$ の決定、即ち測量が必要である。ニュートンの運動の第2法則が要求している速度 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ や加速度 $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ は、静止座標系や慣性座標系における物体の位置 $\boldsymbol{x}$ の決定に基づくものでなくてはならない。

静止座標系とは、絶対に動いていない座標系という意味である。ところが、絶対に動いていないことを示すためには、絶対に動いていない座標系に基づいて位置決定を行い、その座標が変化していないことを示す必要があるが、我々は絶対に動いていないことを証明する手段を持たない。そのため、静止座標系を実現することは不可能である。

静止座標系を実際に使用することが不可能なので、改善の策として、慣性座標系が用いられる。慣性座標系は、原点や座標軸が移動することは容認するが、その運動に加速度が存在しない座標系である。自然科学は、恒星座標系を典型的な慣性座標系として扱う。

恒星座標系とは、原点 O に太陽を取り、太陽から互いに直角な3方向に存在する恒星の方向を、各々、 x 軸、 y 軸、 z 軸と定める $O-xyz$ 直交座標系のことである。恒星も互いに異なる方向に異なる速度で移動しているので、恒星座標系も厳密には慣性座標系ではない。恒星の固有運動が1718年にハレーにより発見され、北斗7星の

形も2000年程度の月日が立てばかなり変化することが知られている。しかし、人が生まれてから死ぬまでぐらいの短期間には恒星座間の相対位置関係が顕著に変化することはないので、一般的な地球物理学的な問題を扱う際には恒星座標系を慣性座標系として扱っても差し支えない。

恒星座標系上で決定された速度を絶対速度と呼び、 $\boldsymbol{v}_a$ と添字 a を付して表現する。同様に、恒星座標系の上での微分演算子を、 $\frac{d_a(\quad)}{dt}$ と添字 a を付して表現する。従って、この論法では、運動方程式は、

$$\boldsymbol{F} = \frac{d_a \boldsymbol{v}_a}{dt} \quad \text{eq. (24)}$$

と表現される。

図8のように、 $\boldsymbol{i}$ 、 $\boldsymbol{j}$ 、 $\boldsymbol{k}$ を慣性系直交座標軸上の単位ベクトル、 $\boldsymbol{i}^*$ 、 $\boldsymbol{j}^*$ 、 $\boldsymbol{k}^*$ を回転系直交座標軸上の単位ベクトルとすると、任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k} \\ &= A_{x^*} \boldsymbol{i}^* + A_{y^*} \boldsymbol{j}^* + A_{z^*} \boldsymbol{k}^* \end{aligned} \quad \text{eq. (25)}$$

と表現でき、座標系が慣性系であろうと回転系であろうと、類似の表現となる。

しかしながら、上式 eq. (25) の時間微分を取ると、

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} &= \frac{dA_x}{dt} \boldsymbol{i} + \frac{dA_y}{dt} \boldsymbol{j} + \frac{dA_z}{dt} \boldsymbol{k} \\ &= \frac{dA_{x^*}}{dt} \boldsymbol{i}^* + \frac{dA_{y^*}}{dt} \boldsymbol{j}^* + \frac{dA_{z^*}}{dt} \boldsymbol{k}^* \\ &\quad + A_{x^*} \frac{d\boldsymbol{i}^*}{dt} + A_{y^*} \frac{d\boldsymbol{j}^*}{dt} + A_{z^*} \frac{d\boldsymbol{k}^*}{dt} \end{aligned} \quad \text{eq. (26)}$$

となり、座標系が慣性系であるか回転系であるかによって、異なる表現となる。

ここで、回転座標系の回転ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}$ とすると、

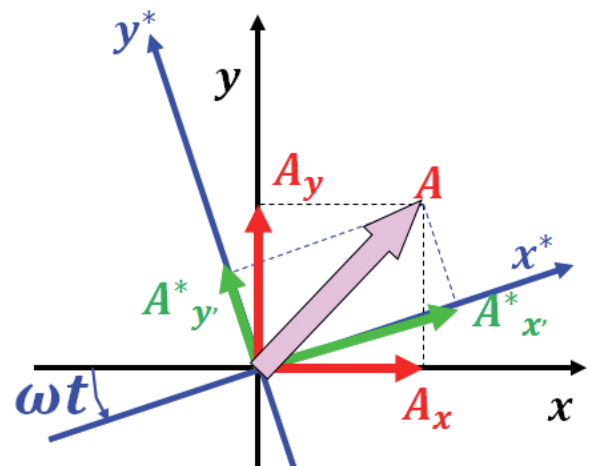


図8 任意のベクトルの慣性座標と回転座標の関係

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{i}^*}{dt} &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}^* \\ \frac{d\mathbf{j}^*}{dt} &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}^* \\ \frac{d\mathbf{k}^*}{dt} &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}^*\end{aligned}\quad \text{eq. (27)}$$

であるから、上式は、

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{dA_{x^*}}{dt} \mathbf{i}^* + \frac{dA_{y^*}}{dt} \mathbf{j}^* + \frac{dA_{z^*}}{dt} \mathbf{k}^* \\ &+ A_{x^*} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}^* + A_{y^*} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}^* + A_{z^*} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}^*\end{aligned}\quad \text{eq. (28)}$$

と表現できる。これは、

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{dA_{x^*}}{dt} \mathbf{i}^* + \frac{dA_{y^*}}{dt} \mathbf{j}^* + \frac{dA_{z^*}}{dt} \mathbf{k}^* \\ &+ \boldsymbol{\Omega} \times (A_{x^*} \mathbf{i}^* + A_{y^*} \mathbf{j}^* + A_{z^*} \mathbf{k}^*)\end{aligned}\quad \text{eq. (29)}$$

と変形でき、かつ、 $\mathbf{A} = A_{x^*} \mathbf{i}^* + A_{y^*} \mathbf{j}^* + A_{z^*} \mathbf{k}^*$ なので、この式は、

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_{x^*}}{dt} \mathbf{i}^* + \frac{dA_{y^*}}{dt} \mathbf{j}^* + \frac{dA_{z^*}}{dt} \mathbf{k}^* + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \quad \text{eq. (30)}$$

と同等である。

ここで、

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d_a \mathbf{A}}{dt} \quad \text{eq. (31)}$$

$$\frac{dA_{x^*}}{dt} \mathbf{i}^* + \frac{dA_{y^*}}{dt} \mathbf{j}^* + \frac{dA_{z^*}}{dt} \mathbf{k}^* = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad \text{eq. (32)}$$

と表記すると、任意のベクトル $\mathbf{A}$ について

$$\frac{d_a \mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \quad \text{eq. (33)}$$

が必ず成り立つ。ここで、 $\frac{d_a \mathbf{A}}{dt}$ ：慣性座標系に対するベ

クトル $\mathbf{A}$ の時間微分、 $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ ：回転座標系におけるベクトル $\mathbf{A}$ の時間微分、 $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$ ：座標系の回転によるベクトル $\mathbf{A}$ の時間微分である。

ここで、地平面に固定した回転座標系の上でデータ処理をしている場合を考える。この場合、回転座標系の回転ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は地球の回転ベクトルである。地球の回転ベクトルは、地軸に平行に置いた右ネジを地球の自転方向に回転させたときに右ネジが進む方向をその方向とし、地球の回転角速度を大きさとするベクトルである。つまり、地球の回転ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は、地軸に平行で北極星の方向を向き、大きさは $\frac{2\pi}{23^h 56^m 04^s} = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ のベ

クトルである。

eq. (33) は任意のベクトル $\mathbf{A}$ について成り立つので、位置ベクトル $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ の場合でも成り立つ：

$$\frac{d_a \mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad \text{eq. (34)}$$

ここで、 $\mathbf{r}$ は地球の中心からの位置ベクトルである。位置ベクトル $\mathbf{r}$ の時間変化率 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ は速度 $\mathbf{v}$ そのものであるから、上式は、

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad \text{eq. (35)}$$

と表記できる。ここで、 $\mathbf{v}_a$ ：絶対速度、 $\mathbf{v}$ ：(相対)速度、 $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ ：接線速度である。

eq. (33) は、速度ベクトル $\mathbf{A} = \mathbf{v}_a$ の場合でも成り立つ：

$$\frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_a \quad \text{eq. (36)}$$

eq. (36) の右辺に eq. (35) を代入すれば、

$$\frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d(\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad \text{eq. (37)}$$

が得られ、括弧をはずすと、

$$\begin{aligned}\frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &+ \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})\end{aligned}\quad \text{eq. (38)}$$

となる。 $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ なので、右辺第3項と4項は同類項と

なり、eq. (38) は、

$$\frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad \text{eq. (39)}$$

と整理できる。この式は1835年にCoriolis (1835) により誘導され、コリオリ定理と呼ばれる。コリオリ定理は、慣性座標系上での加速度、つまり真の加速度である絶対加速度 $\frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt}$ は、右辺第1項の回転座標系を慣性座標

系とみなした場合の相対加速度 $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ と、第2項横加速度

$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}$ 、第3項コリオリ加速度 $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ 、および第4項

求心加速度 $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ の和に等しいことを意味している。ニュートンの運動の第2法則は慣性座標系の上で

成り立つので、絶対加速度 $\frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt}$ は単位質量への外力 $\mathbf{F}$ に等しいから、

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad \text{eq. (40)}$$

と表現でき、左辺で表される力が作用する結果、右辺で表される加速度が生じることを意味している。

地球の回転ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は気象学的事象においては時間変化しない、即ち地球は等速度回転していると看做せるので、右辺第2項の横加速度 $\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}$ はゼロとなり、

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad \text{eq. (41)}$$

が成り立つ。ところが、我々は、自分達が使用している座標系自体が時間変化していることは意識できないので、座標成分の時間変化のみから検出される上式右辺第1項の $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ のみを加速度と認識してしまう。このため、認識された力 $\mathbf{F}$ と認識された加速度 $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ がつり合わない（方向、大きさが一致しない）という矛盾を生じてしまう。

この矛盾は、真の加速度 $\frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt}$ を正しく認識できていないことに原因があるのだが、気象学を含む地球物理学では、上式右辺第1項 $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ のみで正しく加速度を評価していると認識しても矛盾が生じないように、eq. (41) 右辺の第2項コリオリ加速度および第3項求心加速度を左辺に移項して、見かけの力とする扱い方を用いてきた。つまり、

$$\mathbf{F} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{eq. (42)}$$

である。eq. (42) 左辺第1項 $\mathbf{F}$ は実際に存在する真の力であるが、第2項および第3項の $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ と $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ は実際には存在しない見かけの力であり、それぞれ、コリオリ力および遠心力と呼ばれる。見かけの力は、慣性力とも呼ばれる。

$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ は接線速度であり、地表面および赤道面に平行に真東の方向を向いたベクトルである。地球の回転ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ と接線速度 $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ の外積 $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ は、地球の南北鉛直断面上にあって赤道面に平行に地軸方向を向いたベクトルである。従って、 $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ は、地球の南北鉛直断面上にあって赤道面に平行に地軸とは反対の方向を向いたベクトルとなる。この性質から、このベクトル $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ は遠心力と呼ばれる。遠心力は、地球上に位置して地球と同じ角速度で地軸の周りを回転する物体に作用する見かけの力である。

eq. (42) 左辺第1項の真の力 $\mathbf{F}$ としては、地球の引力 $\mathbf{g}_a$ 、気圧傾度力 $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ および摩擦 $\mathbf{F}_r$ の3力が知られている。月や太陽等の他の天体からの引力も作用しているが、これらは地球上の総ての物体に等しく作用するため、空気塊に運動状態の変化をもたらす有効力にはならない。従って、地球大気の運動方程式として

$$\mathbf{g}_a - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F}_r - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{eq. (43)}$$

が成り立つことになる。

地球上の物体に作用する地球からの引力 $\mathbf{g}_a$ と遠心力 $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ は、物体が存在する緯度によって方向と大きさが異なるが、常に、両者同時に作用しており、我々はこの両者を分離して感知することはできない。そこで、地球からの引力 $\mathbf{g}_a$ と遠心力 $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ の合力を重力 $\mathbf{g}$ と定義する。即ち、単位質量にかかる重力を $\mathbf{g}$ とすると、

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_a - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad \text{eq. (44)}$$

である。重力 $\mathbf{g}$ の大部分は地球からの引力 $\mathbf{g}_a$ である。重力 $\mathbf{g}$ の方向は、厳密には、地球の引力 $\mathbf{g}_a$ の方向とは違うが、気象学では、両者の方向は同じとして扱う。重力 $\mathbf{g}$ の大きさは、遠心力 $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ と地球からの引力 $\mathbf{g}_a$ が逆向きになる赤道で最小であり、遠心力 $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ が存在しない極点で最大であるが、気象学では、重力 $\mathbf{g}$ の大きさは緯度や高度によらず一定として扱う。重力 $\mathbf{g}$ により単位質量が受ける加速度を重力加速度といい、 g で表す。通常は標準重力加速度の値 $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ を用いる。

重力 $\mathbf{g}$ は場を形成しており地球環境は重力場の中に存在しているので、重力の影響を強く受けている。我々は、局所直交座標系を設定する際に、 z 軸を天頂方向にとるが、この天頂方向とは重力線の反対方向のことである。

我々は、電車や車に乗っていて、電車や車がカーブすると、カーブの方向とは逆の方向に遠心力 $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ を受けていることを感じるができるが、地球表面に立っていて、南の方向の宇宙空間に放り出そうとする遠心力 $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ を感じることはない。我々は、重力 $\mathbf{g}$ の方向に沿って立つことを何ら不思議に思わないが、重力 $\mathbf{g}$ の方向に沿って鉛直軸を決定する際に、我々は見かけの力である遠心力 $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ の効果は既に考慮済みである。

我々は、地平面と一緒に宇宙空間で円運動をしていることを、全く意識しない（できない）が、それで何にも

不思議に感じない。それと同時に、自分の周辺に位置する自然界の構成要素が、同じく地平面と一緒に宇宙空間で円運動をしていることを、全く意識しない（できない）が、自分の周辺に位置する自然界の構成要素が何時までも自分の側にいることを当然と認識している。見かけの力は、そのような力が存在すると考えなければ、観測者の周辺で起こっている事象の力学的な解釈が困難になるので導入されたと説明してきたが、以上のように、見かけの力である遠心力は、その存在を認識することが極めて困難な力であるというか、存在を仮定しなくても自然認識において不便は感じない。

以上のように、重力を用いることにより、気象学をはじめとする地球物理学では、見かけの力である遠心力 $-\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$ の効果はいちいち考慮する必要がなく、空気塊に掛かる重力 $\mathbf{g}$ 、気圧傾度力 $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ 、摩擦力 $\mathbf{F}_r$ およびコリオリ力 $-2\Omega \times \mathbf{v}$ の4力の合力がゼロであれば地球の空気塊に加速度を生ぜず、この合力がゼロでなければ、合力に相当する加速度が生じると認識される。

従って、地球大気の中で成り立つ運動方程式は

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{F}_r - 2\Omega \times \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{eq. (45)}$$

と表される。即ち、空気塊に掛かる気圧傾度力 $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ 、重力 $\mathbf{g}$ 、摩擦力 $\mathbf{F}_r$ 、遠心力およびコリオリ力 $-2\Omega \times \mathbf{v}$ の4力の合力がゼロであれば地球の空気塊には加速度が生ぜず、この合力がゼロでなければ合力に相当する加速度が生じると認識される。

コリオリ力 $-2\Omega \times \mathbf{v}$ は、遠心力 $-\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$ 同様地球回転の影響による慣性力であるが、遠心力が空気塊の位置ベクトル $\mathbf{r}$ により定まるのに対して、コリオリ力 $-2\Omega \times \mathbf{v}$ は空気塊の速度ベクトル $\mathbf{v}$ により定まる。即ち、コリオリ力 $-2\Omega \times \mathbf{v}$ は、地平面に対して静止している物体には作用しない。

ベクトルの外積の成分表示に関して、極めて有益なベクトル解析の公式がある：ベクトル $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ とベクトル $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ の外積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の成分表示は、

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \quad \text{eq. (46)}$$

により求めることができる。従って、 $\mathbf{A} = -2\Omega$ 、 $\mathbf{B} = \mathbf{v}$ と置いて、両者の外積の成分表示を求めれば、コリオリ力の成分を求めることができる。緯度 φ の地点における地球の回転ベクトル Ω と風ベクトル $\mathbf{v}$ の局所直交座標系

成分表示は、それぞれ、

$$\Omega = (0, \Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi) \quad \text{eq. (47)}$$

$$\mathbf{v} = (u, v, w) \quad \text{eq. (48)}$$

と表現できるので、上記の公式を使って、コリオリ力 $-2\Omega \times \mathbf{v}$ の成分表示は、

$$\begin{aligned} -2\Omega \times \mathbf{v} &= (2v\Omega \sin \varphi - 2w\Omega \cos \varphi) \mathbf{i} \\ &\quad + (-2u\Omega \sin \varphi) \mathbf{j} + (2u\Omega \cos \varphi) \mathbf{k} \\ &= \begin{pmatrix} 2v\Omega \sin \varphi - 2w\Omega \cos \varphi \\ -2u\Omega \sin \varphi \\ 2u\Omega \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{eq. (49)}$$

となる。

このことは、北半球では ($\varphi > 0$ の場合)、地球上を西から東へ水平移動する ($u > 0$) 物体には、南方向へ $2u\Omega \sin \varphi$ 、上方向へ $2u\Omega \cos \varphi$ の見かけの力が働き、南から北へ水平移動する ($v > 0$) 物体には、東方向へ $2v\Omega \sin \varphi$ の見かけの力が働き、下から上へ鉛直移動する ($w > 0$) 物体には東方向へ $2u\Omega \cos \varphi$ の見かけの力が働くことを意味している。つまり、コリオリ力は鉛直方向にも成分を持つ。しかしながら、気象学では、空気の大規模な運動に対して大気は静力学的平衡（静水圧平衡）状態にあると仮定し、地球の回転の影響は、地平面が鉛直軸の周りを回転している影響のみが現れるとし、地球の回転ベクトル Ω の y 成分 $\Omega \cos \varphi$ を無視し、

$$\Omega = (0, 0, \Omega \sin \varphi) \quad \text{eq. (50)}$$

とする。従って、気象学で用いるコリオリ力 $-2\Omega \times \mathbf{v}$ の成分表示は、

$$\begin{aligned} -2\Omega \times \mathbf{v} &= 2v\Omega \sin \varphi \mathbf{i} - 2u\Omega \sin \varphi \mathbf{j} \\ &= (2v\Omega \sin \varphi, -2u\Omega \sin \varphi, 0) \end{aligned} \quad \text{eq. (51)}$$

である。ここで、 $f = 2\Omega \sin \varphi$ と置き、これをコリオリのパラメータと呼ぶ。従って、コリオリ力 $-2\Omega \times \mathbf{v}$ は、コリオリのパラメータ f を用いて、一般に、

$$-2\Omega \times \mathbf{v} = (fv, -fu, 0) \quad \text{eq. (52)}$$

と表記される。

コリオリのパラメータ f は、鉛直軸の回りの地平面の角速度の2倍の大きさを表しており、宇宙空間に対して持っている地平面の鉛直渦度という解釈が可能である。気象学が扱うコリオリ力は、鉛直方向の風速に対しては作用せず、水平風のみに作用する。

気象学が扱うコリオリ力は、北半球では、進行方向右

90°の方向に作用し、大きさは速度に比例する。

コリオリ力 $-2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}$ は、水平方向にのみ作用し、鉛直方向には作用しないので、空気塊の鉛直方向の運動には、気圧傾度力 $-\frac{1}{\rho}\nabla p$ の鉛直成分、摩擦力 F_r および重力 $\boldsymbol{g}$ の3力のみが作用し、しかもその合力はゼロとなり加速度は生じない。

正野（1960）の第7章7.1節「回転する地球上における質点の運動方程式」や小倉（1978）の第1章1.4節「回転地球上の運動方程式」において詳述されている。

V. その他の興味深いコリオリ力教授法

5.1 絶対角運動量保存則による説明

高橋（1968）は、“大部分の教科書では、廻転する円板の中心からほうり出されたボールの運動のモデルを用いていますが、読者はこれを理解しても、この円板上の任意点からほうり出された場合を理解することは難しいものと思われまゝ。”としたうえで、“桜庭信一・小笠原和夫氏共著の気象学通論（1959年、いずみ書房、268p 121～123頁）のように、地軸を中心とした廻転によって生ずる遠心力の水平成分より

$$\frac{dv}{dt} = -fu \quad \text{eq. (53)}$$

が得られ、絶対角運動量の保存則より

$$\frac{du}{dt} = fv \quad \text{eq. (54)}$$

が得られるという解説の方が完全で、結局はこの方が賢明な解説方法ではないかと思ひます。”と記載、さらに“上記の解説を大いに普及させたいと考えているが、同書は1968年時点で絶版となっていて入手困難なので読者の便を考え同書による解説を記載する。”と記載している。

高橋（1968）が記載している桜庭・小笠原（1959）は、発行年、書籍名、出版社名、ページ数、引用ページto ページが総て等しいことから、小笠原・桜庭（1959）の間違いであることは明白である。第4章4.9節「角運動量」、4.10節「絶対角運動量」、4.11節「重力」を論じた後、4.12節において「コリオリの力」を論じている。

高橋（1968）はフリーハンドの2つの図を示しているが、フリーハンド図を一切掲載していない小笠原・桜庭（1959）にこれらを見出すことはできない。最初の図9は小笠原・桜庭（1968）の4.17図の要素も含ませながら4.18図を改修した物とも言えなくもないが、小笠原・桜

庭（1959、121～123頁）には4.18図以外の図は存在しないので2番目の図10は完全に高橋（1968）の創作である。

まず、西風に対するコリオリ力は地軸の周りの回転による遠心力の変化によって説明される。図9に示されるように、緯度 φ における地軸の周りの回転半径は $R \cos \varphi$ なので、地表面に静止している単位質量には $\omega^2 R \cos \varphi$ の遠心力が生ずるが、これは真の重力と呼んでいる地球の引力の水平成分に相殺される。西風成分 u の空気塊が受ける遠心力は絶対速度が $\omega R \cos \varphi + u$ と

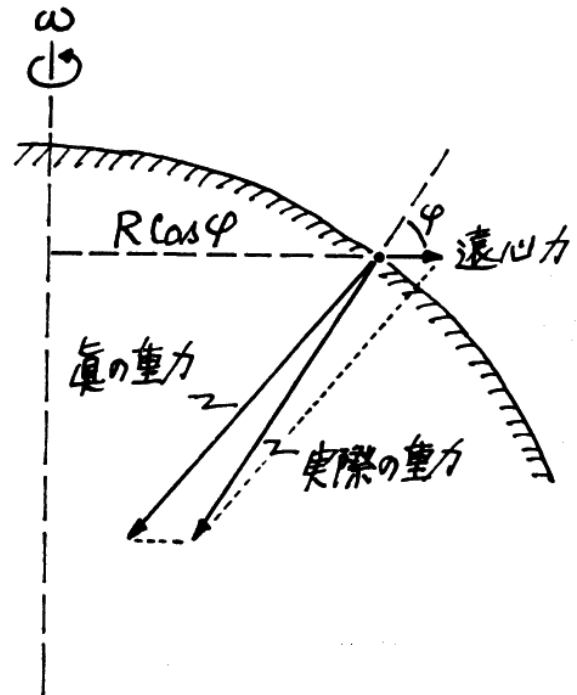


図9 緯度 φ における真の重力と遠心力、および実際の重力の関係（高橋 1968 より）

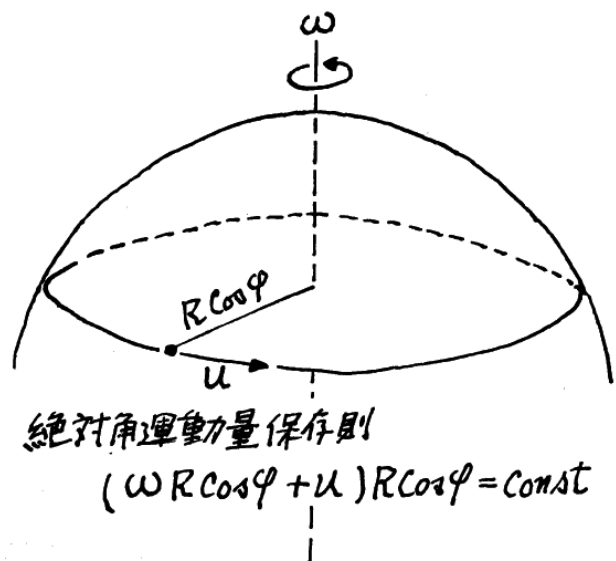


図10 緯度 φ における単位質量の絶対角運動量（高橋 1968 より）

なるから

$$\frac{(\omega R \cos \varphi + u)^2}{R \cos \varphi} = \omega^2 R \cos \varphi + 2\omega u + \frac{u^2}{R \cos \varphi} \quad \text{eq. (55)}$$

となり, u があるため上式 eq. (55) 右辺の第2, 第3項分だけ真の重力の水平成分より増加してくる. u によって新たに生じた右辺の第2, 第3項の鉛直成分は重力の鉛直成分に加算されるので問題はないが, 問題になるのが右辺の第2, 第3項の水平成分で, 南方に向うこの分力によって空気塊は南方に加速される. これを式で示すと

$$\left(2\omega u + \frac{u^2}{R \cos \varphi}\right) \sin \varphi = -\frac{dv}{dt} \quad \text{eq. (56)}$$

あるいは

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -fu - \frac{u^2}{R \cot \varphi} \\ &= -\left(f + \frac{u}{R \cot \varphi}\right)u \doteq -fu \end{aligned} \quad \text{eq. (57)}$$

となる. ここで, $f=2\omega \sin \varphi$ でコリオリ係数, 第2項は曲率項metric termと呼ばれるが, 極付近を除けば一桁以上小さいので省略できる.

次に, 南風に対するコリオリ力は地軸の周りの回転における絶対角運動量保存則によって説明される. 図10に示されるように, 回転半径が $R \cos \varphi$ となる緯度 φ の西風成分 u の空気塊の絶対速度は $\omega R \cos \varphi + u$ であるから西風成分 u の空気塊の絶対角運動量は

$$\begin{aligned} (\omega R \cos \varphi + u)R \cos \varphi \\ = \omega R^2 \cos^2 \varphi + uR \cos \varphi \end{aligned} \quad \text{eq. (58)}$$

と表され, この値は絶対角運動量保存の法則によって一定である. したがって粒子が北或は南側に移行し緯度 φ や西風成分 u が変わっても絶対角運動量は一定であるから, 回転半径の変化に応じ絶対速度が変わり, u の値も変わってくる. これらの変化すなわち増減関係は上式を時間で微分すれば求まる. 上式を時間で微分すると

$$\begin{aligned} -2\omega R^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{du}{dt} R \cos \varphi \\ - uR \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = 0 \end{aligned} \quad \text{eq. (59)}$$

が得られる. $v=R \frac{d\varphi}{dt}$ を考慮しながら, eq. (59) を整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= fv + \frac{uv}{R \cot \varphi} \\ &= \left(f + \frac{u}{R \cot \varphi}\right)v \doteq fv \end{aligned} \quad \text{eq. (60)}$$

となる. 第2項は地球の曲率によるものだが極付近を除けば一桁以上小さいので省略できる.

以上の如く, eq. (57) と eq. (60) より慣性力のみが存在する場合の厳密解は

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \left(f + \frac{u}{R \cot \varphi}\right)v \\ \frac{dv}{dt} &= -\left(f + \frac{u}{R \cot \varphi}\right)u \end{aligned} \quad \text{eq. (61)}$$

となるが, 地球曲率による項metric termは極付近を除けば一般には省略できるので

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= fv \\ \frac{dv}{dt} &= -fu \end{aligned} \quad \text{eq. (62)}$$

となり, 速度 v に対し北半球では直角に右へ fv の加速度が働くことになる.

高橋(1968)は, 類似の記載を行っている文献はないとして, 小笠原・桜庭(1959)を高く評価している. しかしながら, 小笠原・桜庭(1959)は文中に引用表記を一切行っていないため, この説明方法が小笠原・桜庭(1959)のオリジナルか否かは不詳である.

気象力学勃興期の荒川(1941)はほぼ何の説明もなく転向力が加わってくるとしただけだが, 我が国初の近代気象力学の教科書である正野(1954)においては, 第7章7.2節「角速度 Ω で回転するカーテシアン座標系に於ける質点の運動方程式」において遠心力およびコリオリ力を論じた後, 7.3節「回転する地球上に於ける運動方程式」において動径加速度, 緯線加速度, 経線加速度を論じ, 7.4節「絶対角運動量保存の法則」に言及している. 絶対角運動量保存則を扱ったのちに重力, コリオリ力を論じる展開にした点には新規性を認めることができるにしても, 小笠原・桜庭(1959)が正野(1954)に目を通さずに起草されたとは考え難く, 絶対角運動量保存則に基づくコリオリ力の誘導を小笠原・桜庭(1959)のオリジナルと考えることは不自然である.

Leaver(1942)が初めて絶対角運動量保存則から南風に対するコリオリ力を導いた. Haukwitz(1943)は鉛直成分にも発展させた. 正に太平洋戦争の最中である. 正野(1954)は正にこの直後の時代の我が国における気象力学の教科書である. “我が国は戦争のために諸外国

の進歩の状況に対して全く盲目状態であった。終戦後数年経過して漸く諸外国から文献が入るようになってみると、理論気象学の専門家以外には直ちに追従できない程の變り方であった。従って専門的研究者以外は十年近くの空白時代を未だに取返す事ができない儘に諸外国の進歩を傍観している様な状態である。”と記している。その正野（1954）がアメリカ気象学会のBulletinに目を通していない訳がないと思われるが、Leaver（1942）やHaukwitz（1943）からの引用の記載はない。

海外における気象力学の入門教科書について精通している訳ではないが、筆者の手元にあるGordon et al.（1998）は第7章7.4節「derivation of the components of the Coriolis force from the law of the conservation of angular momentum」において、遠心力と絶対角運動量保存則に基づくコリオリ力の誘導を記載している。現在の我が国の気象学初心者に良く読まれている小倉（1984, 1999）第6章6.2節「みかけの力（コリオリの力）」にもほぼ同様の記載がなされているが、同書は、我が国の大学の教養課程の教科書として適切になるよう1982年～1983年に新たに書き下されたものであるものの、イリノイ大学の気象科学教室の教官が教養課程の学生の選択科目として毎年講義してきたものが基礎となっている。小倉（1978）には、絶対角運動量保存則に基づくコリオリ力の誘導に関する記載が出てこないこと等を考慮すると、絶対角運動量保存則に基づくコリオリ力の誘導が日本でオリジナルに始まったと考えることは不自然と思料する。

5.2 ピタゴラスの定理による説明

Persson（2015）はコリオリ力の幾何学的な誘導法として注目される。Persson（2015）の付録に記載されているピタゴラスの定理を用いて求心加速度やコリオリ加速度の大きさを求める方法は、微分・積分を用いない教授法として魅力的である。筆者が前報（中川 2015a）を脱稿する寸前（2014年）にEarly Online Release版を入手できたので「おわりに」で言及したが、図5～7と極めてよく似た条件下で、ピタゴラスの定理を用いた求心力および東西方向・南北方向への相対運動に対するコリオリ力による偏りや加速度の大きさの定量的表現の幾何学的誘導法が提唱されていることが注目された。特に、東西方向への相対運動においては曲率項も導ける点が注目された。距離の偏りや加速度の大きさの定量的表現だけでなく、運動方向の偏りも綺麗に説明できる本稿の方法の方が優れていると思われるが、それ以前の問題として、このような観点からの考究が現時点においても研

究・教育上大きなニーズを有することを示唆するものとして強く注目したい。

本稿が慣性系で等速度運動している物体を議論しているのに対して、Persson（2015）は回転盤上を一定方向に等速運動する物体を想定して、当該物体に発生する加速度を見積もるところに大きな差異がある。

図11（a）は回転盤上に静止している物体の慣性系での運動を示す。回転盤上に静止する物体が慣性系上で太矢印 $\overrightarrow{AC}$ で示される円運動を行う際、物体は点Aでは点Bを目指している、とする図の構成は本稿の図1と同じである。図11（a）中の太矢印 $\overrightarrow{AC}$ は物体が点Aから点Cに移動する軌跡である。 $\omega = \Omega \cdot \Delta t$ と表すと、 $OA = R$ 、 $AB = R\omega$ 、求心加速度による移動距離BCを ΔS とすると、 $\triangle OAB$ は $\angle A = \angle R$ の直角三角形なので、ピタゴラスの定理より、

$$(\Delta S + R)^2 = R^2 + (R\omega)^2 \quad \text{eq. (63)}$$

がなりたつ。eq. (63) 両辺の括弧を展開すると、

$$\Delta S^2 + 2R\Delta S + R^2 = R^2 + (R\omega)^2 \quad \text{eq. (64)}$$

かつ、 $\Delta S^2 \ll R^2$ なので、eq. (63) は

$$2R\Delta S = (R\omega)^2 \quad \text{eq. (65)}$$

となり、両辺を R で除すと

$$2\Delta S = R\omega^2 \quad \text{eq. (66)}$$

が得られる、としている。求心加速度による移動距離 ΔS の2倍 $2\Delta S$ がその加速度を発生させる力となるのは、本稿と同じ論理である。静止した物体は地表面と全く同

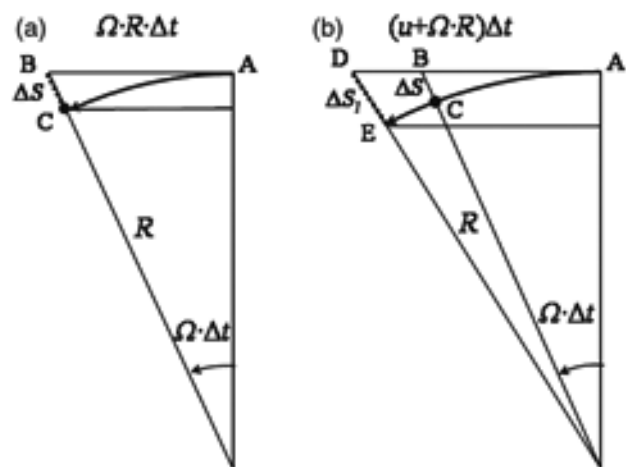


図11 (a) 求心加速度および (b) 接線方向の運動に対するコリオリ加速度の誘導 (Persson 2015 より)

じ求心加速度を受けるので、地表面と全く同じ運動を行い、いつまでも地表面上の同じ位置に存在できる。つまり無風のままである。

図11 (b) は、回転盤上点Aにおいて点Aに静止している物体より u [m/s] 速い接線速度で点Aを通る円軌道上を回転する物体が、点Aが円軌道上の点Cに至る時間に同じ円軌道上 u [m] 前方の点Eに至ると仮定している。この物体の接線速度は $R\omega + u$ [m/s] であるので、地平面が受ける求心加速度による変位 ΔS_1 は、 $\angle OAD$ に関するピタゴラスの定理より、

$$(\Delta S_1 + R)^2 = R^2 + (R\omega + u)^2 \quad \text{eq. (67)}$$

の関係を満足する。両辺の括弧を展開すると、

$$\begin{aligned} \Delta S_1^2 + 2R\Delta S_1 + R^2 \\ = R^2 + (R\omega)^2 + 2uR\omega + u^2 \end{aligned} \quad \text{eq. (68)}$$

となる。これを整理すると、

$$2\Delta S_1 = R\omega^2 + 2u\omega + \frac{u^2}{R} \quad \text{eq. (69)}$$

を得る。これは、点Aが点Cに至る時間にこの物体が点Eに至るためには、 $R\omega^2 + 2u\omega + \frac{u^2}{R}$ [m/s²] の求心加速度により ΔS_1 [m] 変位することが必要であることを意味する。このときの $\overrightarrow{DE}$ 方向の $R\omega^2$ 以外の2項、 $2u\omega$ と $\frac{u^2}{R}$ が、それぞれ、コリオリ加速度と曲率項である。

もし点Aに存在する接線速度 u [m/s] の物体にトルクが働かない場合には、この物体に作用する求心力は引力の水平成分だけなので、この物体に生じる求心加速度は静止している物体と同じ $R\omega^2$ だけとなり、点Eに到達することはできず、点Aに存在する速度 u [m/s] の物体に生じる求心力による変位は点Aに存在する静止物体に生じる変位 ΔS と同等とならなければならない。つまり、点Aから円運動して点Eに到達する物体には静止物体に比べてコリオリ加速度と曲率項の分だけ過剰な求心加速度が生じなければならない。このため、点Aで速度 u [m/s] の円運動する物体にはトルクを受けることなく点Aを速度 u [m/s] で通過した物体に比べて $\Delta S_1 - \Delta S$ [m] だけ大きな変位不足が生じる。コリオリ加速度とは逆方向に $-2u\omega$ [m/s²] の見かけの加速度を発生させる見かけの力を受けているように見える。この見かけの加速度 $-2u\omega$ [m/s²] を生じさせる力が見かけの力としてのコリオリ力である。

Persson (2015) による静止物体が受ける求心加速度、

および接線方向に移動する物体が受けるコリオリ力と曲率項の大きさの求め方はあざやかと言って良い。実際の教育において使用してみたい、との興味を抱かせる。

これに対して、Persson (2015) による動径方向に移動する物体が受けるコリオリ力の大きさの求め方は些か手際が悪いように思料される。図12 (a) は角速度 Ω [rad/s] で反時計回りに回転する回転盤上を回転軸方向に速度 v [m/s] で等速直線運動して点Gに到達する物体の慣性系上の経路が太矢印 $\overrightarrow{AG}$ で示されている。点BおよびCは図11 (a) と同じく、点Aで回転系上に静止している物体の慣性系上の目的地点および到達点であり、 $BC = \Delta S$ が求心加速度が生じた結果の転向を表す。点Gは点Cより回転中心に距離 v [m] 近寄った場所なので、 $OG = OF = R - v$ である。

求心加速度以外の加速度の方向と大きさを見積もるためには、トルクが作用しない場合の移動物体の慣性系上の目的地点を明確にすることが不可欠である。しかしながら、図12 (a) には、トルクが作用しない場合の移動物体の慣性系上の目的地点や慣性系上の移動経路が記されていない。トルクが作用しない場合の移動物体の慣性系上の目的地点は、図12 (b) に示されるように、点Aの静止物体の慣性系上の目的地点Bから $\overrightarrow{AF}$ と平行な方向へ v [m] 進んだ地点である。トルクが作用しない場合の移動物体にも静止物体と同じ求心加速度が生じるため、移動物体の慣性系上の目的地は、静止物体の到達点Cから $\overrightarrow{AF}$ と平行な方向へ v [m] 進んだ地点となる。

図12 (a) (b) におけるトルクが作用しない場合の移動物体の慣性系上の目的地を点Hと表記すると、点Hは点Cから $\overrightarrow{AF}$ と平行な方向へ v [m] 進んだ地点となり、

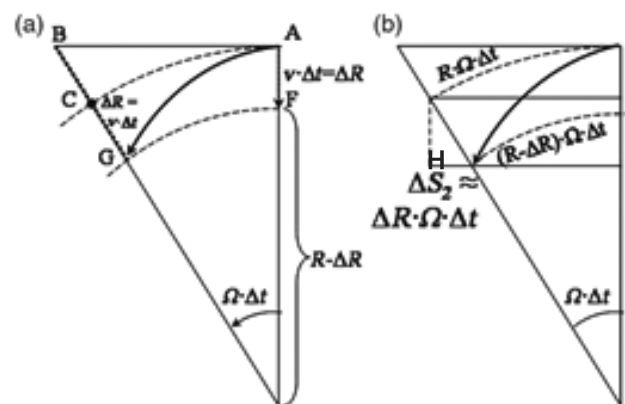


図12 (a) トルクを受けて回転系上を動径方向に直進する物体の軌跡と (b) トルクを受けない場合の動径方向の運動に対するコリオリ加速の誘導 (Persson 2015 より)。(b) 中の点Hは筆者加筆

点Hは点Gの左に位置し、 $\angle GCH = \omega$ となる。CG = v であるから、 $GH = v\omega$ となる。つまり、物体が太矢印 $\overrightarrow{AG}$ を移動するためには、BCの転向を起こす求心加速度とHGの転向を起こすコリオリ加速度を同時に受ける必要がある。転向HGは回転盤上の点AおよびFの移動距離ACとFGの差に等しく、

$$\Delta S_2 = R\omega - (R - v)\omega = v\omega \quad \text{eq. (70)}$$

が成り立つとしているが、鮮やかな説明とは言い難い。

Persson (2017) は、同じ問題を説明する際に若干異なる図を用いている（図13参照）。トルクを受けていない場合（図13（左））には赤点線で囲まれた $\triangle OHC$ の面積は緑色の $\triangle OED$ の面積と等しくて角運動量は保存されるのに対して、トルクを受けている場合（図13（右））には赤点線で囲まれた $\triangle OEG$ の面積は緑色の $\triangle OHC$ の面積より小さくなり角運動量は保存されずに減少しているとし、トルクがかかることにより、 $DG = \Delta S_2$ の転向、即ちコリオリ加速度が生じるとしている。

しかしながら、図13（左）を見る限り、 $\triangle OHC > \triangle OED$ は明らかなので、角運動量保存則が $\triangle OHC = \triangle OED$ と等値とするPersson (2017) の主張には矛盾がある。この図は物体の軌跡図なので、角運動量保存が成り立っている場合には面積速度が保存されるため、扇形OACの面積と扇形OADの面積が等しくなくてはならない。扇形OACと扇形OADは、それぞれ、 $\angle OAC$ と $\angle OAD$ で近似されるので、結局、 $\triangle OAC$ の面積と $\triangle OAD$ の面積が等しくなくてはならない。ところが、両三角形は底辺OAが共通なので、面積が等しくなるためには高さが等しくなくてはならないため、 $HC = ED$ でなくてはならない。よって常に eq. (70) が成り立つことが主張できるように思料さ

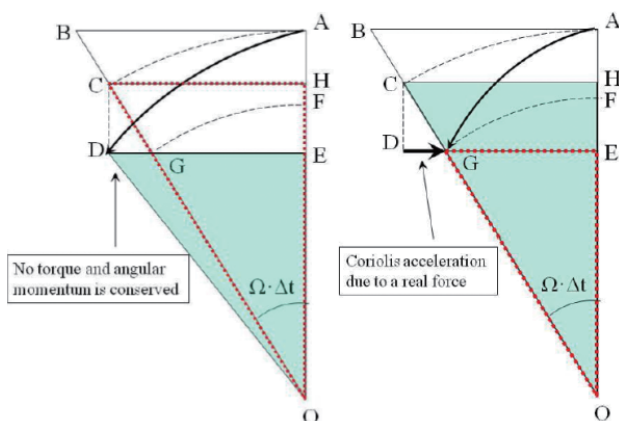


図13 （左）トルクを受けない場合と（右）受けた場合の回転系上を動径方向に直進する物体の慣性系上の軌跡の比較（Persson 2017 より）

れる。

以上の議論では、動径方向の運動においては曲率項が出現しないように見える。そこで、 u [m]の接線方向の運動に v [m]の動径方向の運動が重なっている場合について、もう少し吟味する。

図13点Dを図11（b）点Eに置き換えると、eq. (70) は

$$\begin{aligned} \Delta S_2 &= R \left(\omega + \frac{u}{R} \right) - (R - v) \left(\omega + \frac{u}{R} \right) \\ &= v\omega + \frac{uv}{R} \end{aligned} \quad \text{eq. (71)}$$

となる。一見、動径方向の運動においても、この方法で幾何学的に曲率項が求まるように見えるが、eq. (61)

と比較すると、この曲率項 $\frac{uv}{R}$ は $\frac{uv}{2R}$ だけ過大であること

が明白である。これは、 $HC < ED$ であることを示唆しているが、現時点では明快な説明を行うことができない。

Persson (2015, 2017) の方法は、コリオリ力だけでなく曲率項までも幾何学的に導出できそうなので大変魅力的であるが、地表面が受ける求心加速度、接線方向の相対運動に対する議論に比べると、南風のときに空気塊が受けるコリオリ力の大きさの求め方はあざやかとはいえない。

VI. 異なる教授法に関する若干の考察

6.1 回転中心からか否か

吉崎 (2013) は、初学者向けのコリオリ力説明方法として、

- (1) 定性的な見方
 - (2) 微分的な見方
 - (3) 差分的な見方
 - (4) 角運動量保存則などを用いた物理的な見方
- の4通りを提唱した。

回転系の回転の中心を通して慣性系上で等速円運動をしている物体の軌跡を回転系上の回転中心からみると、右に曲がりながら進行しているように見える。として説明する方法を、吉崎 (2013) は定性的な見方としているが、これは高校地学の平面回転盤を用いた実験による指導（横尾ほか、1995）と同等の方法である。回転盤の実験は直観的には分かり易いと捉えられ、立正大学環境システム学科においても、回転盤を用いた水槽実験による学生実験が行われている（写真1参照）。ただし、曲がるように見えれば即コリオリ効果というような定性的な

説明だけではたして良いのだろうか？

高橋 (1968) は, “大部分の教科書では, 廻転する円板の中心からほうり出されたボールの運動のモデルを用いていますが, 読者はこれを理解しても, この円板上の任意点からほうり出された場合を理解することは難しいものと思われまふ.” と指摘している.

このタイプのモデルは, 北極熊・ペンギンモデルと呼ばれることが多い (例えば, Gordon et al. 1998). 北極点では夏至の日は太陽は地平線上を時計回りに一周する. 正午に北極点から常に太陽に向かって氷上を一定速度で歩き始めた白熊は, スタートした瞬間は真南に向かっていて, 進行方向が徐々に時計回りに変化し, 3 時間後には西向き, 6 時間後には北向き, 9 時間後には東向き, 12 時間後には南向きとなりかつスタート地点に戻ってくる. 白熊は等速円運動をすることとなり, この円は慣性円 inertial circle と呼ばれる. 同様の話が, 冬至の日に南極点から太陽に向かってスタートしたペンギンを対象にしたものがペンギンモデルである. 北極点から大砲の弾を発射するモデルが良く見られるが, 流石に滞空時間が 12 時間の砲弾は想定しにくいので, 大砲の弾のブーメラン効果を説くような解説は見かけない.

6.2 拡張螺旋と慣性円

この問題を厳密に考察するためには, 慣性座標系の原点 O を通って慣性座標系の y 軸方向に速度 v_0 の慣性運動をする物体を, 原点 O を共有する回転系から観察する必要がある. 慣性直交座標 (x, y) を局所直交座標 (x', y') に変換する関係式は

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \omega t + y \sin \omega t \\ y' &= -x \sin \omega t + y \cos \omega t \end{aligned} \quad \text{eq. (72)}$$

と表される. 慣性座標系の原点 O を通って慣性座標系の y 軸方向に速度 v_0 の慣性運動をする物体を, 回転系から観察すると,

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= v_0 t \end{aligned} \quad \text{eq. (73)}$$

なので, 局所直交座標 (x', y') を慣性直交座標 (x, y) に変換する関係式は

$$\begin{aligned} x' &= v_0 t \sin \omega t \\ y' &= v_0 t \cos \omega t \end{aligned} \quad \text{eq. (74)}$$

となる. 辺々自乗して加えると



写真1 表面にアルミ粉を浮かべ中心部を冷却, 周辺部を加熱して水平温度差を与えた水槽を回転させる実験の様子. カメラは回転盤上に設置されている (立正大学学園新聞第111号 2010より, 渡来 靖講師 (現教授) 撮影).

$$x'^2 + y'^2 = (v_0 t)^2 \quad \text{eq. (75)}$$

となり, 拡張螺旋 expanding spiral となる.

図14に, 原点から慣性座標の y 軸方向に速度 v_0 の慣性運動をする物体の軌跡である拡張螺旋を示す. 図14には, コリオリ力による慣性円も示す. 拡張螺旋と慣性円の差が遠心力を意味する.

eq. (16) (17) において, コリオリ力以外の力が一切存在しない場合には, 運動方程式は

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = 2m \frac{dy'}{dt} \omega \quad \text{eq. (76)}$$

$$m \frac{d^2 y'}{dt^2} = -2m \frac{dx'}{dt} \omega \quad \text{eq. (77)}$$

と記載される. eq. (77) を積分して得られる次式

$$m \frac{dy'}{dt} = -2m x' \omega \quad \text{eq. (78)}$$

をeq. (76) に代入すると,

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = -4m \omega^2 x' \quad \text{eq. (79)}$$

が得られる. eq. (79) は明確な単振動の方程式である. 従って, 解は

$$\begin{aligned} x' &= A \sin(2\omega t + \phi) \\ y' &= B \sin(2\omega t + \phi) \end{aligned} \quad \text{eq. (80)}$$

と表される円軌道となり, 慣性円と呼ばれる.

慣性系で完全静止している物体

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad \text{eq. (81)}$$

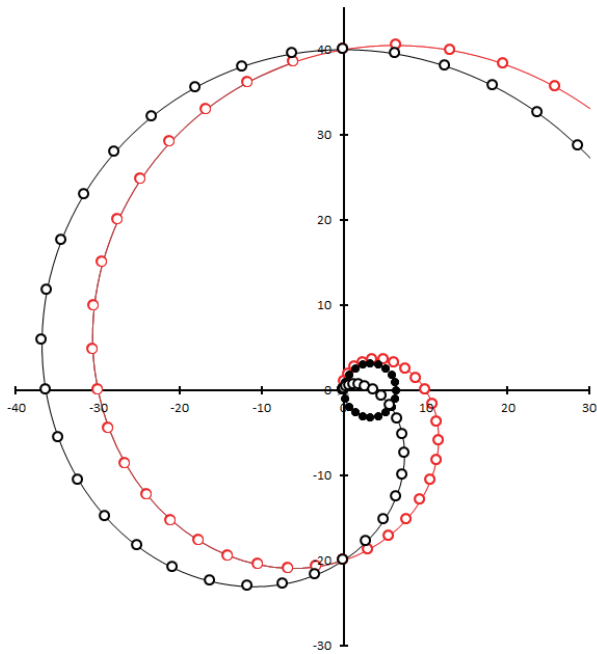


図14 回転中心からの拡張螺旋○と慣性円●および両者の差として求めた遠心力○の比較

を回転系から見ると、

$$\begin{aligned} x' &= y_0 \sin \omega t \\ y' &= y_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad \text{eq. (82)}$$

となる。辺々自乗して加えると

$$x'^2 + y'^2 = y_0^2 \quad \text{eq. (83)}$$

となり、回転中心から一定の距離を回転系の回転方向とは逆方向に角速度 ω で回転する円軌道を描き定常状態を保つ。木村（1973）は、これを、回転系上の観察者は「この物体には半径方向外向きに場の遠心力および物体が回転運動をしていることによって生じる遠心力が働く」とともに、回転の中心方向に働く転向（コリオリ）力が働き、両者が釣り合っている」と認識すると指摘している。場の遠心力は木村（1973）による造語である。

6.3 微分学的説明と幾何学的説明

筆者（中川 2015a, b）は、教員養成系大学や理学環境系学科所属の初年次学生のような真の初学者にも「コリオリ力」との声を上げさせる、コリオリ力の定性的な説明ではなく定量的説明法の試みとして、「気象と水の科学」による教授法を位置付けた。

本稿がとりあげた「気象と水の科学」を含む5種類のコリオリ力の教授法は、いずれも、定量的な扱いをしており、「気象と水の科学」とPersson（2015）は1秒間の差分的な見方、「基礎物理学」と「気候・気象学」は微

分的な見方、そして、小笠原・桜庭（1959）は角運動量保存則などを用いた物理的な見方に立っている。

地球断面を想定する小笠原・桜庭（1959）以外は、平面回転盤を想定している。平面回転盤を提示すると、多くの学生はこれを回転盤の中心を地軸と地表面の交点とする北半球地表面のモデルと想定する素朴な誤謬が行いがちである。しかし、平面回転盤と実際の地表面とは決定的な相違が存在する。地軸との交点を中心とする地表面に作用する南方向の遠心力は地球の引力の地表面方向成分と釣り合うため、地表面南方向の慣性力は発生しないが、平面回転盤上では回転盤中心の周りを回転することによる慣性力をキャンセルする力は存在しないため、平面回転盤縁方向の慣性力が発生する。このため、平面回転盤上で地表面に生起する現象を実験的に正確に再現できるのは、遠心力の効果を無視できる、回転盤の回転中心近傍のみに限定される。

「基礎物理学」と「気候・気象学」は、具体的な物体の運動を扱うことなく、数式の変形により回転座標系上の運動方程式を求めている。これに対して、「気象と水の科学」と小笠原・桜庭（1959）は慣性運動する物体を扱い、Persson（2015）は回転系上で等速直線運動する物体を扱っている。

「基礎物理学」と「気候・気象学」は、自然科学教育としては、定番の教授法である。いずれも吉崎（2013）のいう微分的な見方をとっているため、微分・積分学に関する基礎的な知識・計算技術が必須である。そもそも、前提となっている2階常微分方程式となる運動方程式そのものを未修得の学生がいることが大きな問題である。このため、「基礎物理学」においても「気候・気象学」においても、授業は運動方程式の学習から始めざるを得ないのが実情である。「基礎物理学」は、さらに、慣性座標系と回転座標系の間の座標変換に関する知識・技術が必要となる一方、「気候・気象学」は回転ベクトルを含むベクトル解析の知識・技術が必要となる。座標変換は高等学校数学で既修の学生もいるが、回転ベクトルを含むベクトル解析が既修の学生はほぼ存在しない。

初学者向けの教育という観点からは、いくつかの問題点がある。聴講学生は慣性系における運動方程式の誘導の段階までは大きな戸惑いは生じないようであるが、数式変形の連続となるその後の展開においては、個々の物体の具体的な運動のイメージと対応させることが困難なため、最終的結論に対する物理的イメージを得ることが困難となっているように思料される。

本稿が取り上げた5種類のコリオリ力の教授法はいず

れも現実空間における実験的操作ではなく観念上の思考によるものなので、作用する力は適宜仮定したり無視したりできる。つまり、コリオリ力は残すが遠心力は意図的に無視して議論することが可能である。

6.4 トルクの有無

「気象と水の科学」とPersson (2015) は、ともに地球の引力の水平成分が場の遠心力と等しい回転平面とみなせる地表面上で単独の物体の軌跡を追いながら幾何学的手法によりコリオリ力の定量的な表現に到達させるものである。最終的結論に対する物理的イメージは修得し易いと思料されるものの、両者の論理展開には大きな相違点がある。「気象と水の科学」は回転平面上で相対慣性運動する物体が目的地点から変位した地点に到達するように見える問題を議論しているのに対して、Persson (2015) はトルクを受けながら回転平面上で相対直進運動する物体が予定通り目的地点に到着するために必要な加速度を議論している。Persson (2015) が議論している加速度はコリオリ加速度と呼ばれ、コリオリ加速度が発生している物体からみると、コリオリ加速度と逆向きの加速度を発生させる慣性力であるコリオリ力が作用している、と説明する。「気象と水の科学」は、相対慣性運動する物体が進行方向右90°の方向にコリオリ力を受けたため実際の到着地点が目的地点から変位した、と説明する。

「気象と水の科学」の教授法乃至はPersson (2015) の方法、いずれの教授法でもコリオリ力の定量的表示を幾何学的に求めることができ、物理学的には妥当であるが、気象学をはじめとする地球回転流体力学では「気象と水の科学」における説明が一般的である。ただし、東西方向の相対運動の幾何学的説明に限定すると、コリオリ力のみしか導出できない「気象と水の科学」の方法に比べて、ピタゴラスの定理を用いて曲率項まで導出できるPersson (2015) の方法の方が優れているように思料される。しかしながら、南北方向の相対運動に関しては、Persson (2015) においても曲率項の定量的表現は導出できていない。

VII. おわりに

筆者が立正大学地球環境科学部環境システム学科において教鞭をとった最近15年間に実践してきた3種類のコリオリ力教授法と機会があれば実践してみたいと考えていた2種類のコリオリ力教授法を整理し、若干の比較検

討を行った。

その結果、今回検討した5種類のコリオリ力教授法にはそれぞれ一長一短があるが、定量的な表現の導出においては、大学入学初年度生の数学や物理学に関する基礎的知識・技術の修得状況を考慮すると、幾何学的手法を用いる「気象と水の科学」の方法やPersson (2015, 2017) の方法が適しているように思料された。特に、場の遠心力や接線方向の運動に対するコリオリ力の場合には、ピタゴラスの定理を用いるPersson (2015, 2017) の方法が最も学生に理解され易いように思料された。ベクトルの合成によって説明する「気象と水の科学」の方法も学生に理解され易いが、曲率項も導出できる面において、Persson (2015, 2017) の方法の方が優れているように思料された。動径方向への運動に対しては、Persson (2015, 2017) の方法を以ってしても、正確な曲率項の導出はできなかった。数学や物理に関する十分な知識・技術が修得された後であれば、コリオリ力の定量的表現の導出としては「気候・気象学」の方法が最適と思料されるが、同方法では曲率項を導出することは困難と思料される。

謝辞

立正大学地球環境科学部環境システム学科助教の平田英隆博士には、気象学におけるコリオリ力の取扱いについて種々ご議論頂いた。匿名の査読者によるコメントは原稿改良に大変役立った。記して深謝の意を表します。

文献

- American Meteorological Society (2000) : Coriolis Effect. *American Meteorological Society Glossary of Meteorology*. Retrieved 1/21/2015.
- American Meteorological Society (2012) : *Coriolis Effect : Because the Earth Turns. Teacher's Guide*. American Meteorological Society, Education Program, 18pp.
- 荒川秀俊 (1941) : 『気象力学 [増訂版]』岩波書店, 132pp.
- Coriolis, G. G. (1835) : Mémoire sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps. *Journal de L'École Royale Polytechnique*. **15**, 144-154.
- Gordon, A., W. Grace, P. Schwerdtfeger, and R. Byron-Scott (1998) : *Dynamic Meteorology A Basic Course*. Arnold, 325pp.
- Haukwitz, B. (1943) : Remarks on a simplified derivation of the Coriolis acceleration. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, **24**, 194-195.
- 池田幸夫 (2005) : 難解な科学概念を教授する工夫—イメージから数式へ—。山口大学FDハンドブック第3部『大学

- における授業改善ヒント集』山口大学, 39-42, 74pp.
- 木村 竜治 (1973) : 回転流体の性質について. 天気, **20**, 517-531.
- 小林則彦 (2019) : 「コリオリ力」の効果を視認できる簡易実験機. 平成30年度東レ理科教育賞受賞作集 (第50回), 39-42. http://www.toray-sf.or.jp/activity/science_edu/pdf/h30_10.pdf
- Leaver, J. A. (1942) : A simplified derivation of the Coriolis acceleration in two dimensions. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, **23**, 298-302.
- 中川清隆 (2015a) : 吉崎 (2013) : コリオリ力の「ユリイカ」に対するコメント. 地球環境研究, **17**, 111-121.
- 中川清隆 (2015b) : 私立大学理学系環境学科初年次教育における幾何学的手法によるコリオリ力の定量的教育の実践. 日本地学教育学会第69回全国大会福岡大会講演予稿集, 102-103.
- 中島健介 (2018) : コリオリ力を体感できる実験. 天気, **65**, 359-362.
- 中村晃三 (2013) : コリオリ力の「ユリイカ」を読んで. 天気, **60**, 475-477.
- 小笠原和夫・桜庭信一 (1959) : 『気象学通論』いずみ書房, 268pp.
- 小倉義光 (1978) : 『気象力学通論』東京大学出版会, 249pp.
- 小倉義光 (1984) : 『一般気象学』東京大学出版会, 314pp.
- 小倉義光 (1999) : 『一般気象学 [第2版]』東京大学出版会, 308pp.
- Persson, A. (2015) : Is the Coriolis effect an 'optical illusion'? . *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **141**, 1957-1967. DOI:10.1002/qj.2477.
- Persson, A. (2017) : How Newton might have derived the Coriolis acceleration. *BibNum*, 1-21. [http:// www.bibnum.education.fr/sites/default/files/171-analysis-eng.pdf](http://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/171-analysis-eng.pdf)
- 正野重方 (1954) : 『気象力学序説』岩波書店, 425pp.
- 正野重方 (1960) : 『気象力学』岩波書店, 284pp.
- 高橋正吾 (1968) : コリオリ力の初心者向き解説に当たっての問題点. 天気, **15**, 2-4.
- 為近和彦 (2014) : 『カラー改訂版 理系なら知っておきたい物理の基本ノート [力学編]』KADOKAWA/中経出版, 246pp.
- 寺田一彦 (1968) : コリオリ力の初心者向き解説. 天気, **15**, 1.
- 山岸米二郎 (2013) : コリオリ力の「ユリイカ」一つの試み. 天気, **60**, 963-966.
- 横尾武夫・柴山元彦・福江 純 (1995) : コリオリ力の巨視的理解—コンピュータグラフィックスを活用して—. 地学教育, **48**, 147-156.
- 吉田雅巳・貫井正納・橋本一人 (1992) : コリオリ力の指導について. 日本理科教育学会全国大会要項, **42**, 104-105. http://dl.ndl.go.jp/view/download/digidepo_10409836_po_ART0003392603.pdf?contentNo=1&alternativeNo=
- 吉田 茂・石井正則・須藤正道・中村将裕・近澤仁志 (2005) : 直線加速度刺激による重力軸および水平軸認知への影響. 耳展 (耳鼻咽喉科展望) **48**, 4, 214-220.
- 吉崎正憲 (2013) : コリオリ力の「ユリイカ」. 天気, **60**, 119-124.

Comparing Different Explanations of the Coriolis Force Practiced in Department of Environment Systems, Rissho University, in the Last Decade and a Half

NAKAGAWA Kiyotaka*

* Department of Environment Systems, Faculty of Geo-Environmental Science, Rissho University

Abstract :

The present study compared three kinds of teaching methods on Coriolis effect and/or force that were practiced in three classes such as “Sciences of Atmospheric State and Water”, “Fundamental Physics”, and “Climatology and Meteorology”, at Department of Environment Systems, Faculty of Geo-Environmental Science, Rissho University, by the author in the last 15 years, and two other kinds of methods proposed by Persson (2015, 2017) and Ogasawara and Sakuraba (1959), that the author had wanted to teach if there was an opportunity.

As a result, each of the five methods examined in the present study had advantages and disadvantages. Considering the acquisition of basic knowledge and skills in mathematics and physics in first-year university students, it was concluded that the methods of “Sciences of Atmospheric State and Water” and Persson (2015, 2017) using the geometric technique were suitable.

Particularly, in the case of deriving an expression of the centrifugal force and/or Coriolis force for a body moving with a tangential velocity relative to the rotational velocity, a method of Persson (2015, 2017) using the Pythagorean theorem was the easiest to be understood by students. The author’s teaching method used in the class “Sciences of Atmospheric State and Water” was also easy to be understood by students, but it could not derive the metric terms so that a method of Persson (2015, 2017) was superior to the author’s method. However, in the case of deriving an expression of the Coriolis force for a radially moving body, a method of Persson (2015, 2017) was also not able to derive metric terms exactly.

Key words: Coriolis force, different explanations, geometrical method, differential method,
coordinate transformation, absolute angular momentum conservation

