

遠心力, コリオリ力および曲率項の幾何学的誘導

中 川 清 隆* 渡 来 靖* 平 田 英 隆*

キーワード：慣性力, 遠心力, コリオリ力, 曲率項, 幾何学的誘導

I. はじめに

角速度 ω 一定の回転座標系に現れる慣性力（遠心力, コリオリ力および曲率項）は, 気象学・気候学上は極めて重要な概念である. しかしながら, その理解のためには微分やベクトル解析の知識が必須のため, 大学初年度生を対象とする初学者教育は容易ではない.

中川 (2020) は, 第一筆者が立正大学地球環境科学部環境システム学科において教鞭をとった最近15年間に「気象と水の科学」「基礎物理学」および「気候・気象学」で実践してきた3種類のコリオリ力教授法と機会があれば実践してみたいと考えていたLeaver (1942) およびPersson (2015, 2017) による2種類のコリオリ力教授法, 併せて5種類の方法を整理し, 若干の比較検討を行った. 「気象と水の科学」は矢線ベクトルの合成により, 「基礎物理学」は座標変換により, 「気候・気象学」はベクトル方程式によるコリオリ定理により, Leaver (1942) は角運動量保存則により, そしてPersson (2015, 2017) はピタゴラスの定理により, コリオリ力を導出する方法を用いている.

その結果, 中川 (2020) により検討された5種類のコリオリ力教授法にはそれぞれ一長一短があるが, 定量的な表現の導出においては, 大学入学初年度生の数学や物理に関する基礎的知識・技術の修得状況を考慮すると, 幾何学的手法を用いる「気象と水の科学」の方法やPersson (2015, 2017) の方法が適しているように思料された. 特に, 場の遠心力 (木村 1973) や接線方向の運動に対するコリオリ力の場合には, ピタゴラスの定理を用いるPersson (2015, 2017) の方法が最も学生に理解され易いように思料された. ベクトルの合成によって説明する「気象と水の科学」の方法も学生に理解され易い. しかし, 曲率項も導出できる面において, Persson (2015, 2017) の方法の方が優れているように思料された. 動径方向への運動に対しては, Persson (2015, 2017) の方

法を以ってしても, 正確な曲率項の導出はできなかった.

数学や物理に関する十分な知識・技術が修得された後であれば, コリオリ力の定量的表現の導出としては「気候・気象学」の方法が最適と思料されるが, 同方法では曲率項を導出することは困難と思料される.

本稿は, 微分やベクトル解析の知識が十分ではない環境系の大学初年度生にも容易に導出できる, 遠心力, コリオリ力および曲率項の定量的表現の純幾何学的誘導について検討することを目的とする.

II. 接線方向の運動に対する慣性力

本節では, 接線方向の運動に対する慣性力を, Persson (2015) と同様の方法で求める. 先ず, 図1のように, 角速度 ω 一定の回転盤上における回転の中心Oから距離 R の点Aに静止している物体が Δt 秒間に受ける慣性力の大きさの定量的表現を導出する. ここで, Δt は微小時間である. $\triangle OAB$ は直角三角形であり, 辺ABの長

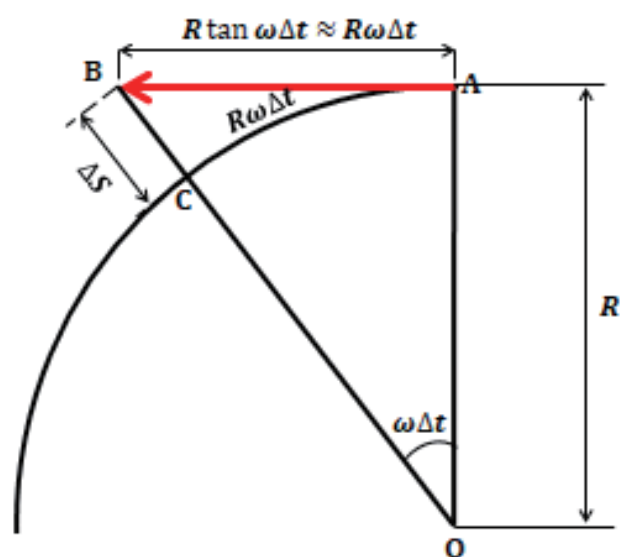


図1 角速度 ω の回転盤上の点Aが Δt 秒間に受ける求心力

* 立正大学地球環境科学部・環境システム学科

さは $R \tan \omega \Delta t$ である． $\tan \omega \Delta t$ をマクローリン展開すると，

$$\tan \omega \Delta t = \omega \Delta t + \frac{1}{3}(\omega \Delta t)^3 + \frac{2}{15}(\omega \Delta t)^5 + \dots \quad (1)$$

となる． $|\omega \Delta t| \ll 1$ の場合、式（１）の右辺は一次近似でき，

$$\tan \omega \Delta t \approx \omega \Delta t \quad (2)$$

となる．即ち，

$$R \tan \omega \Delta t \approx R \omega \Delta t \quad (3)$$

が成り立つ．故に， Δt が十分小さく， $|\omega \Delta t| \ll 1$ が成り立つ場合， Δt 秒間における物体の移動距離（円弧 AC の長さ） $R \omega \Delta t$ は辺 AB の長さ $R \tan \omega \Delta t$ に近似できる．以下では， Δt が十分小さく，近似式（３）が成り立つ場合を考える．

回転盤上の点 A は慣性により， Δt 秒後には点 A から $R \tan \omega \Delta t$ 離れた点 B に移動すると近似できる．ところが、実際には， Δt 秒後には，点 A は点 B ではなく点 O を中心とする半径 R の円と OB の交点 C に到達する． $OC=R$ なので，回転盤の Δt 秒間の動径方向への変位を ΔS とすると， $\angle OAB$ に対するピタゴラスの定理により

$$(R \tan \omega \Delta t)^2 + R^2 = (\Delta S + R)^2 \quad (4)$$

が成り立つ．上述の如く，今，近似式（３）が成り立つ場合を考えているので，式（４）は

$$(R \omega \Delta t)^2 + R^2 \approx (\Delta S + R)^2 \quad (5)$$

と近似できる．式（５）の（ ）を外すと

$$R^2 \omega^2 (\Delta t)^2 + R^2 \approx \Delta S^2 + 2R\Delta S + R^2 \quad (6)$$

となるが， $R^2 \gg \Delta S^2$ なので ΔS^2 を無視した後に両辺から R^2 を引き，さらに R で除すと次式

$$2\Delta S \approx R \omega^2 (\Delta t)^2 \quad (7)$$

が得られる．等加速度運動の場合， $2\Delta S = a(\Delta t)^2$ が成り立つ．ここで， a は加速度の大きさである．よって，式（７）右辺の $R \omega^2$ は加速度の大きさを表す．加速度の方向は $\overrightarrow{BC}$ ，即ち， $\overrightarrow{BO}$ の方向なのでこの加速度は求心加速度であり，回転盤表面の円運動に起因する求心力により発生する．求心力は回転半径 R に比例し，比例定数は回転角速度の自乗 ω^2 である．つまり，点 A において速度の接線方向の成分（以降，接線速度成分と記す） $R \omega$ の慣性運動をしようとする単位質量の物体が等速回転運動

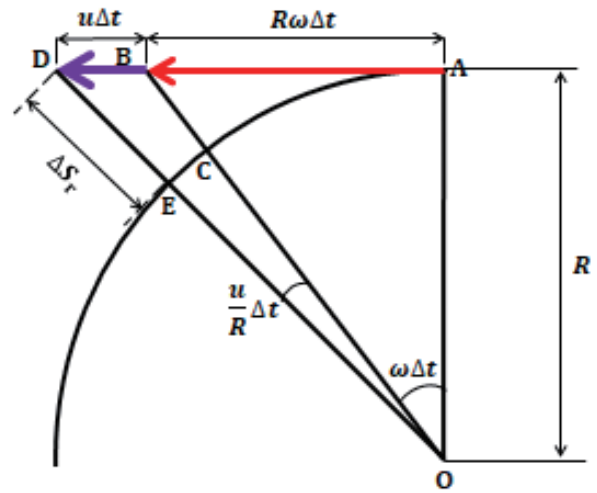


図２ 角速度 ω の回転盤上の点 A において相対接線速度成分 u の物体が Δt 秒間に受ける求心力

を行うためには大きさ $R \omega^2$ の求心力を受ける必要がある．

回転盤上の点 A に静止して等速回転運動をして点 C に到達した物体は，本来ならば点 B に到達させようとする力を $\overrightarrow{CB}$ ，即ち， $\overrightarrow{OB}$ の方向に受けているように感じる．この力は場の遠心力（木村 1973）と呼ばれ，慣性運動に戻そうとする見かけの力であり，求心力とは向きが逆で大きさが等しい．

次に，図 2 のように，点 A において回転盤上の点 A より相対的に u 大きい接線速度成分を持っている物体の運動を考える．ただし， $\omega \gg \frac{u}{R}$ とする．この物体の静止

空間に対する絶対速度の接線方向の成分（以降，絶対接線速度成分と記す）は $R \tan \omega + u$ と表せるので，回転盤上の点 A にいるこの物体は Δt 秒後には点 A から $R \tan \omega \Delta t + u \Delta t$ 離れた点 D に移動しようとしていることになる．

ところが実際には， Δt 秒後にはこの物体は点 D ではなく点 O を中心とする半径 R の円と OD の交点 E に到達する．図 1 の場合と同様の方法により， Δt 秒後に点 D を目指していながら実際には点 E に到達する物体が受ける慣性力を導く． $OE=R$ なので，この物体の Δt 秒間の動径方向への変位を ΔS_r とすると， $\angle OAD$ に対するピタゴラスの定理により

$$(R \tan \omega \Delta t + u \Delta t)^2 + R^2 = (\Delta S_r + R)^2 \quad (8)$$

が成り立つ．式（４）の場合と同様，近似式（３）が成り立つ場合を考えているので，式（８）は

$$(R \omega + u)^2 (\Delta t)^2 + R^2 \approx (\Delta S_r + R)^2 \quad (9)$$

と近似できる. 式(9)両辺の()を外し, $R^2 \gg \Delta S_r^2$ なので ΔS_r^2 を無視すると

$$(R^2\omega^2 + 2R\omega u + u^2)(\Delta t)^2 + R^2 \approx 2R\Delta S_r + R^2 \quad (10)$$

となる. 両辺から R^2 を引いた上で両辺を R で除すと

$$2\Delta S_r \approx \left(R\omega^2 + 2\omega u + \frac{u^2}{R}\right)(\Delta t)^2 \quad (11)$$

が得られる.

$2\Delta S = a(\Delta t)^2$ の関係から, この場合3種類の加速度が生じることがわかる. 式(11)右辺第1項の $R\omega^2$ は, 式(7)で求められた回転盤表面が受ける求心加速度と全く同等である. つまり, 相対速度の接線方向の成分(以降, 相対接線速度成分と記す) u で回転盤上を回転運動している物体は, 回転盤表面と全く同等の求心加速度の他に2種類の加速度が付加されることを意味している. 第2項の $2\omega u$ がコリオリ加速度であり, 第3項の $\frac{u^2}{R}$ が曲率項である. コリオリ加速度は相対接線速度成分 u に比例し, 比例定数は回転盤の角速度 ω の2倍である. 曲率項は相対接線速度成分 u の自乗 u^2 に比例し, 比例定数は回転半径 R の逆数 $\frac{1}{R}$ である. この様に接線方向の運動に対する慣性力の定量的表現を微分やベクトル解析の技法を用いることなく導くことができる.

接線方向の運動に対する慣性力はPersson (2015)の方法により微分・積分を用いることなく完璧に誘導・説明できる. 大学初年次生教育に適した教育方法である.

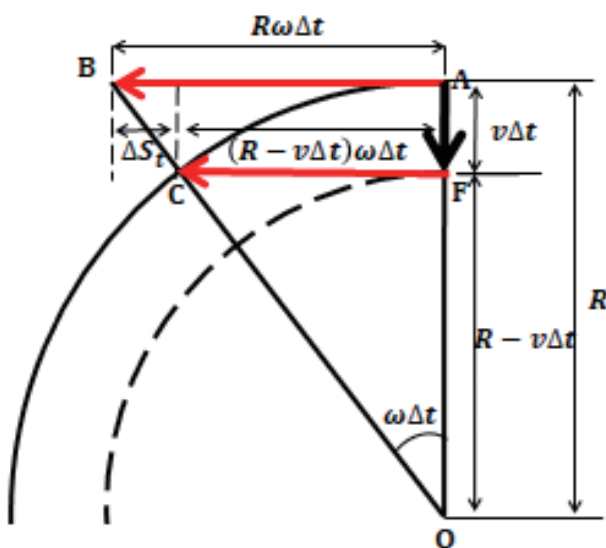


図3 角速度 ω の回転盤上の動径が R の点Aと動径が $R - v\Delta t$ の点Fにおける Δt 秒間の接線方向移動距離の差

Ⅲ. 動径方向の運動に対する慣性力

Persson (2015)の方法による接線方向の運動に対する慣性力の誘導が極めてみごとなので, 当然, 動径方向の運動に対する慣性力の誘導にも威力を発揮することが期待される. ところが, Persson (2015)は動径方向の運動に対しては曲率項の導出を試みず, 図3のように, 回転盤上の点Aより v の相対速度で回転の中心に向かう物体は Δt 秒後には点Aから $v\Delta t$ 離れた点Fに移動しようとしているとし, 半径 R の時と半径 $R - v\Delta t$ の時の Δt 秒間の円弧状軌跡の長さの差 ΔS_t をABとFCの差

$$\Delta S_t = R\omega\Delta t - (R - v\Delta t)\omega\Delta t = \omega v(\Delta t)^2 \quad (12)$$

とし, $2\Delta S_t = 2\omega v(\Delta t)^2$ であるから $2\omega v$ をコリオリ加速度としている.

上記の説明では, 単純に回転盤上の点Aの接線速度成分と点Fの接線速度成分の差の Δt 倍をコリオリ加速度による変位としているように思わせてしまうが, 厳密に理解させるためには, 角運動量保存則に基づく相対接線速度の変化による変位として説明を行うことが肝要である(図4).

即ち, 点Aに単位質量の物体が位置している際の絶対接線速度成分は $R\omega$ であるから, 角運動量は $R^2\omega$ と表せる. Δt 秒後の目的地点Fに物体が到達した時の物体の絶対接線速度成分が回転盤上の点Fの絶対接線速度成分 $(R - v\Delta t)\omega$ より Δu だけ大きくて $(R - v\Delta t)\omega + \Delta u$ となるとすると, その角運動量は $(R - v\Delta t)((R - v\Delta t)\omega + \Delta u)$ と

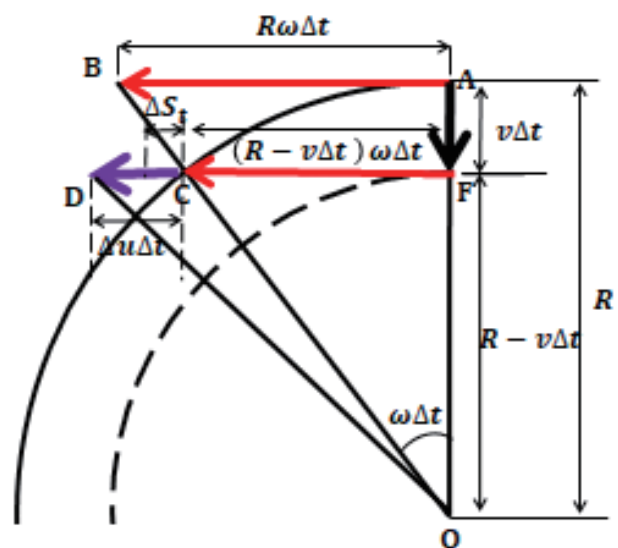


図4 角運動量保存則が成り立つとした場合に角速度 ω の回転盤上の点Aにおいて相対速度の動径方向の成分 v をもつ物体の, 点Aおよび点Fにおける Δt 秒間の接線方向移動距離

なるので，角運動量保存則より

$$R^2\omega = (R - v\Delta t)((R - v\Delta t)\omega + \Delta u) \quad (13)$$

が成り立たねばならない．これを展開すると

$$R^2\omega = R^2\omega - 2R\omega v\Delta t + \omega v^2(\Delta t)^2 + R\Delta u - v\Delta u\Delta t \quad (14)$$

となり，2次の微小量を無視し両辺から $R^2\omega$ を引くと

$$R\Delta u \approx 2R\omega v\Delta t \quad (15)$$

となるので，両辺を $R\Delta t$ で除すと

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} \approx 2\omega v \quad (16)$$

が得られるとするのが妥当な説明である．

$\frac{\Delta u}{\Delta t}$ は加速度である．従って， $2\Delta S = a(\Delta t)^2$ の関係から，変位 ΔS_t は

$$\Delta S_t = \frac{1}{2} \cdot 2\omega v(\Delta t)^2 = \omega v(\Delta t)^2 \quad (17)$$

と表される．式(17)は式(12)と同等となるが，決して点Aの接線速度成分と点Fの接線速度成分の差の Δt 倍を求めた結果ではないことが注目されるべきである．式(12)や(17)に曲率項は出現しない．

図5のように，点Aにおいて接線方向の相対速度成分 u も存在する場合には，点Aに位置する単位質量の物体の持つ絶対接線速度成分は $R\omega + u$ ，角運動量は $R(R\omega + u)$ と表せる． Δt 秒後の目的地点Fに到達した時の単位質量の物体の絶対接線速度成分が回転盤上の点Fの絶対接線速度成分 $(R - v\Delta t)\omega$ より $u + \Delta u$ だけ大きくて $(R - v\Delta t)\omega + u + \Delta u$ となるとすると，その物体の持つ角運動量は $(R - v\Delta t)((R - v\Delta t)\omega + u + \Delta u)$ となるので，角運動量保存則より

$$R(R\omega + u) = (R - v\Delta t)((R - v\Delta t)\omega + u + \Delta u) \quad (18)$$

が成り立たねばならない．これを展開すると

$$R^2\omega + Ru = R^2\omega - 2R\omega v\Delta t + \omega v^2(\Delta t)^2 + Ru + R\Delta u - uv\Delta t - v\Delta u\Delta t \quad (19)$$

となり，2次の微小量を無視し両辺から $R^2\omega + Ru$ を引くと

$$R\Delta u \approx 2R\omega v\Delta t + uv\Delta t \quad (20)$$

となるので，両辺を $R\Delta t$ で除すと次式

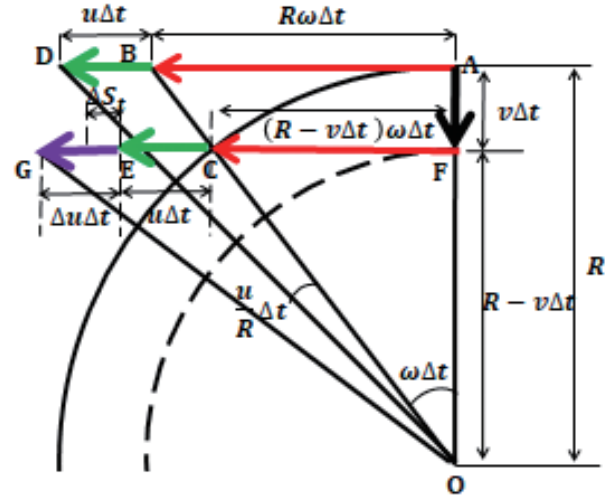


図5 角運動量保存則が成り立つとした場合に角速度 ω の回転盤上の点Aにおいて相対接線速度成分 u ，相対速度の動径方向の成分 v をもつ物体の，点Aおよび点Fにおける Δt 秒間の接線方向移動距離

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} \approx 2\omega v + \frac{uv}{R} \quad (21)$$

が得られる．式(21)の右辺第1項がコリオリ加速度，第2項が曲率項の定量的表現である．

図4の場合と同様に， $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ は Δt 秒間における加速度である．従って， $2\Delta S = a(\Delta t)^2$ の関係から，変位 ΔS_t は

$$\begin{aligned} \Delta S_t &= \frac{1}{2} \left(2\omega v + \frac{uv}{R} \right) (\Delta t)^2 \\ &= \left(\omega v + \frac{uv}{2R} \right) (\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (22)$$

と表され，式(12)乃至(17)の右辺に $\frac{uv}{2R}(\Delta t)^2$ が付加された形になる．点Aに於いて相対接線速度成分 u が存在しない式(12)乃至(17)には曲率項は出現しないが，相対接線速度成分 u が存在する式(22)には曲率項が出現することが注目される．

IV. 動径方向の運動における曲率項の誘導に関する若干の考察

前節において，微分を用いないで幾何学的に，角運動量保存則から，角速度 ω 一定の回転座標系に現れる動径方向の運動による慣性力（コリオリ力および曲率項）の数量的表現の誘導を行った．同様の結果は，微分を用いれば極めて容易に導くことができる．

単位質量に対する絶対角運動量保存則は

$$\omega R^2 + uR = \text{const.} \quad (23)$$

と表される. 式 (23) を時間 t で微分すると,

$$2\omega R \frac{dR}{dt} + \frac{du}{dt} R + u \frac{dR}{dt} = 0 \quad (24)$$

となる. 式 (24) に $\frac{dR}{dt} = -v$ を代入して整理すると,

$$\frac{du}{dt} = 2\omega v + \frac{uv}{R} \quad (25)$$

が得られる. この式 (25) は式 (21) と完全に一致する.

前節において延々と論述して得られたものと同等の結果がわずか7行の記載で得られるので, 幾何学的誘導に対する微分学的誘導の優位性は明白である. ただし, 微分演算を単なる形式的な式変形ととらえてしまうと現象の物理的理解には繋がらないので, 教育的観点からは必ずしも優れているとは言えない側面があることに注意を要する.

本節では, 前節の如く角運動量保存則からスタートする方法とは別の観点から, 動径方向の運動におけるコリオリ力と曲率項の数式的表現を, 微分を用いずに誘導できる可能性について検討する.

Δt 秒間に動径が R から $R - v\Delta t$ に変化する際の単位質量の物体の回転の運動エネルギーの変化は

$$\frac{1}{2} \left((R - v\Delta t)\omega + u + \Delta u \right)^2 - \frac{1}{2} (R\omega + u)^2 \quad (26)$$

と表される. この間の平均の遠心力を, 動径が $R - \frac{1}{2}v\Delta t$

の時の遠心力で代表させると, 動径が R から $R - v\Delta t$ に変化する間に遠心力に抗して単位質量の物体になされた仕事は

$$\frac{\left(\left(R - \frac{1}{2}v\Delta t \right) \omega + u + \frac{1}{2}\Delta u \right)^2}{R - \frac{1}{2}v\Delta t} v\Delta t \quad (27)$$

と表される. 角運動量が保存される時, 接線方向には力は作用していないためトルクは作用していないので, 力学的エネルギー保存則より, 式 (26) で表される運動エネルギーの増加は, 式 (27) で表される動径方向にされた仕事と等しくならねばならない. よって,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left((R - v\Delta t)\omega + u + \Delta u \right)^2 - \frac{1}{2} (R\omega + u)^2 \\ &= \frac{\left(\left(R - \frac{1}{2}v\Delta t \right) \omega + u + \frac{1}{2}\Delta u \right)^2}{R - \frac{1}{2}v\Delta t} v\Delta t \end{aligned} \quad (28)$$

が成り立つ. 式 (28) の両辺に2を掛けて

$$\begin{aligned} & (2R\omega + 2u - v\omega\Delta t + \Delta u)(-v\omega\Delta t + \Delta u) \\ &= (2R\omega + 2u - v\omega\Delta t \\ &+ \Delta u) \frac{R\omega - \frac{1}{2}v\omega\Delta t + u + \frac{1}{2}\Delta u}{R - \frac{1}{2}v\Delta t} v\Delta t \end{aligned} \quad (29)$$

と変形した上で, 両辺を $2R\omega + 2u - v\omega\Delta t + \Delta u$ で除すと,

$$\begin{aligned} & -v\omega\Delta t + \Delta u \\ &= \frac{R\omega v\Delta t \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v}{R}\Delta t \right) + uv\Delta t + \frac{1}{2}v\Delta u\Delta t}{R \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v}{R}\Delta t \right)} \end{aligned} \quad (30)$$

が得られる. ここで, $R \gg v\Delta t$ なので $1 - \frac{1}{2}\frac{v}{R}\Delta t \approx 1$ と見

做せるため式 (30) は

$$-v\omega\Delta t + \Delta u \approx \omega v\Delta t + \frac{uv\Delta t}{R} + \frac{v}{2R}\Delta u\Delta t \quad (31)$$

となり, 更に2次の微小量を無視すると

$$\Delta u \approx 2\omega v\Delta t + \frac{uv}{R}\Delta t \quad (32)$$

と変形できるので, 両辺を Δt で除すれば,

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} \approx 2\omega v + \frac{uv}{R} \quad (33)$$

が得られる. この式 (33) は式 (21) と全く同等である. 即ち, 動径方向の運動により生じる接線方向の慣性力は, 遠心力に抗して物体の動径が変化する間になされる仕事により生じるとしても, 全く同様に, 正確に誘導できる.

V. おわりに

求心加速度, コリオリ加速度および曲率項の定量的表現を, 微分やベクトル解析を用いずに幾何学的な考察のみにより誘導できる可能性を検討した. 微分やベクトル解析の知識が必ずしも十分ではない教員養成系や環境系の大学初年度生にも容易に導出できれば, 気象学の初学者教育において極めて有益である.

接線方向の運動における慣性力, 即ち, 場の遠心力, コリオリ力および曲率項については, ピタゴラスの定理の利用により, 完璧に幾何学的に誘導できることが示された. 動径方向の運動における慣性力, 即ち, コリオリ力および曲率項については, ピタゴラスの定理を利用することは出来ないが, 角運動量保存則を利用することにより, 誘導できることが示された.

しかしながら, 角運動量保存則を利用して論理展開する際に, 微分を利用したのでは初学者教育に資する誘導方法の提唱, という本稿の目的には適合しない. このた

め, 本稿では Δt 秒間における動径半径の変化 $v\Delta t$ に伴う相対接線速度成分の微小変化 Δu を用いる論理展開を用いた. この点において, 本稿の方法が初学者に容易に理解されるか否か, 不詳である.

また, 本稿は, 微分や座標変換についての既存の知識・技術は不要であるものの, 慣性力の導出過程においてマクローリン展開を用いたり, 慣性力により生じる加速度が当該慣性力による変位の2倍と同等であることを, および角運動量保存則が自然界において成り立つことを既知とした論理展開を取ったりしている. 初学者教育の場において, この前提が妥当であるか否かの検討もなされる必要がある.

謝辞

匿名の査読者による3度にわたるコメントは原稿改良に大変役立った. 記して深謝の意を表します.

文献

- 木村竜治 (1973) : 回転流体の性質について. 天気, **20**, 517-531.
- Leaver, J. A. (1942) : A simplified derivation of the Coriolis acceleration in two dimensions. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, **23**, 298-302.
- 中川清隆 (2020) : 立正大学環境システム学科において最近15年間に実践されたコリオリ力の異なる教授法の比較. 地球環境研究, **22**, 81-101.
- Persson, A. (2015) : Is the Coriolis effect an 'optical illusion'? *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **141**, 1957-1967. DOI:10.1002/qj.2477.
- Persson, A. (2017) : How Newton might have derived the Coriolis acceleration. *BibNum*, 1-21. <http://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/171-analysis-eng.pdf>.

Geometrical Derivation of Centrifugal Force, Coriolis Force and Metric Term

NAKAGAWA Kiyotaka*, WATARAI Yasushi* and HIRATA Hidetaka*

*Department of Environment Systems, Faculty of Geo-Environmental Science, Rissho University

Abstract :

The purpose of the present paper is to derive the numerical expressions for all inertial forces such as centrifugal force, Coriolis force and metric term with the geometric method. It was shown that the inertial forces in tangential motion can be perfectly induced geometrically by the use of the Pythagorean theorem. Furthermore, it was shown that the Coriolis force and metric term in radial motion can be derived by the angular momentum conservation, instead of the Pythagorean theorem. The geometric derivation shown in this paper is expected to be easily understood by environmental science students who do not have sufficient knowledge of differential calculus and vector analysis, and is extremely useful for teaching meteorology beginners.

Key words: inertial forces, centrifugal force, Coriolis force, metric term, geometrical derivation