

# 気象教育における大気境界層の摩擦力の扱い方に関する一考察

中川清隆\* 渡来靖\*\*

キーワード：摩擦力, 大気境界層, バランス風, 非バランス風

## I. はじめに

地表面近傍の地球大気最下層は大気境界層と呼ばれる。地球大気系の唯一の有効エネルギー源は太陽放射であるが、地球大気系に到達した太陽放射が直接地球大気に吸収される割合は比較的小さく、地球大気系が吸収する太陽放射のほとんどは先ず地表面によって吸収され、その後地表面によって吸収された太陽放射エネルギーが様々なエネルギー形態に配分されたうえで大気にも伝わり、大気の熱環境や運動環境が変化する。地表面と大気間のエネルギーの交換にも大気の運動が大きな貢献をする。太陽放射は太陽の日周運動に伴い明確な日変化をするため、大気境界層では気温と風の明確な日変化が生じることになる。人類の生活のほぼすべてはこの大気境界層内で展開されるため、環境教育の一環として環境気象教育を展開する際には、大気境界層に関する気象教育は極めて重要ということになる。

当初の気象学基礎理論は、水蒸気を取り除かれた地球大気、いわゆる乾燥空気について構築され、乾燥空気の状態を特定するためには次の6変数が必要であることが明らかにされた：①気圧、②気温、③密度、④西風成分、⑤南風成分、⑥上昇流。ここで、④～⑥は風速の3次元ベクトルの各成分である。これらの6変数を支配する互いに独立な6個の方程式も明らかにされた：①状態方程式、②熱力学の第1法則、③連続の式、④～⑥  $x, y, z$  方向の運動方程式。6変数とそれらを支配する6方程式からなるこの方程式系は完全系であり、必ず解が存在する、として気象学の論理体系は展開されている。このため環境教育の一環としての初等気象教育においては、乾燥空気に対するこの6つの支配則を理解させることが極めて肝要である。

大気境界層における運動環境の日変化を理解させようとする場合、 $x, y, z$  方向の運動方程式に関する知識の取得やその理解が特に重要となる。気象教育は、小学校～

高等学校段階の理科教育で様々なアプローチが試みられているが、大方は、天気予報に資する自由大気に関する学習に重点が置かれているため、乾燥断熱減率や地衡風等の概念は周知されているが、大気境界層内の現象に重点を置いたものは皆無に等しい。

気象学では粘性および熱伝導のない完全流体として扱える自由大気と気層内の空気塊の運動に対する地表面摩擦の影響を無視できない大気境界層を区別しているが、大気境界層と自由大気の差異を説明する際に摩擦(friction)という言葉が乱流抗力(turbulent drag)の代わりに不適切に使用されることがよくあると指摘されている(American Meteorological Society 2022)。大学入学までは摩擦力というと滑り摩擦程度しか経験していない環境系初年次生に気象学における摩擦力の概念やその影響を受けた現象に関する教育を実施しようとすると、種々の困難が生じる。

本稿は、初等気象教育における大気境界層における摩擦力の取り扱い方について、その現状と問題点を整理することを目的とする。

## II. 大気境界層における摩擦力

先ず気象における摩擦力とは何か？ について吟味しておく必要がある。非圧縮性を仮定し、重力とコリオリ力を外力とすると、 $x, y, z$  方向のナビエ・ストークスの運動方程式は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv - f^*w + F_{rx}^* &= \frac{du}{dt} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + F_{ry}^* &= \frac{dv}{dt} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + f^*u + F_{rz}^* &= \frac{dw}{dt} \end{aligned} \quad (1)$$

と表すことができる。ここで、 $u$ ：西風成分、 $v$ ：南風成分、 $w$ ：上昇流、 $\rho$ ：密度、 $p$ ：気圧、 $g$ ：重力加速度、 $f, f^*$ ：コリオリパラメータ、 $F_{rx}^*, F_{ry}^*, F_{rz}^*$ ：分子運動

\* 立正大学名誉教授／上越教育大学名誉教授

\*\* 立正大学地球環境科学部環境システム学科

による粘性摩擦力であり,  $u, v, w$  はそれぞれ, 西風, 南風, 上昇流の時に正值となる. コリオリパラメータには  $f = 2\Omega \sin \varphi$  と  $f^* = 2\Omega \cos \varphi$  の2種類があり,  $\varphi$ : 緯度である. 分子運動による粘性摩擦力  $\overline{F_r^*} = (F_{rx}^*, F_{ry}^*, F_{rz}^*)$  は

$$\begin{aligned} F_{rx}^* &= \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ F_{ry}^* &= \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ F_{rz}^* &= \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

となることが知られている (Salby 1996). ここで,  $\mu$ : 静粘性係数,  $\frac{\mu}{\rho}$ : 動粘性係数である.

本稿では鉛直  $z$  方向において重力  $-g$  と気圧傾度力  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$  が釣り合う静水圧平衡が成り立つことを前提とし,  $x, y, z$  方向の運動方程式を以下の式 (3) のように表す.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + F_{rx}^* &= \frac{du}{dt} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + F_{ry}^* &= \frac{dv}{dt} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$z$  方向のコリオリ力  $f^* u$  と粘性摩擦力  $F_{rz}^*$  を無視したのに併せて  $x$  方向のコリオリ力  $-f^* w$  が無視されていることに注意が必要である. 静水圧平衡が成り立っているため  $z$  方向には加速度が生じないので, 本稿では, 以降,  $x, y$  方向のみの運動方程式について議論することとする.

式 (3) 右辺のラグランジュの加速度をオイラーの加速度に書き直し,  $x, y$  方向ごとに非圧縮性流体の連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

に  $u, v$  を掛けて, それぞれ加えると,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + F_{rx}^* &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + F_{ry}^* &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vu}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} \end{aligned} \quad (5)$$

となる.

式 (5) に, 気圧  $p$  と風速  $u, v, w$  を, それぞれ, 平均とそれからの摂動にレイノルズ分解して

$$\begin{aligned} p &= \bar{p} + p' \\ u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w' \end{aligned} \quad (6)$$

と表して代入し, 全体の平均をとる. 大変複雑な作業と

なるので,  $x$  方向のみを表すと,

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{(\bar{p} + p')}}{\partial x} + f \overline{(\bar{v} + v')} + \overline{F_{rx}^*} \\ &+ \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \overline{(\bar{u} + u')}}{\partial x^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \overline{(\bar{u} + u')}}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \overline{(\bar{u} + u')}}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial \overline{(\bar{u} + u')}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{(\bar{u} + u')^2}}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial \overline{(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{(\bar{u} + u')(\bar{w} + w')}}{\partial z} \end{aligned} \quad (7)$$

となり, これを整理すると

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{v} + \overline{F_{rx}^*} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} \\ &\quad + \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \end{aligned} \quad (8)$$

となる. 式 (4) は平均値でも成り立つので

$$\bar{u} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = 0 \quad (9)$$

が成り立つ. 式 (8) の右辺から式 (9) を減じ, さらにオイラーの加速度をラグランジュの加速度に書き直すと, 式 (8) は

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{v} + \overline{F_{rx}^*} \\ &= \frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \end{aligned} \quad (10)$$

となる. 同様の操作により,  $y$  方向については,

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f \bar{u} + \overline{F_{ry}^*} \\ &= \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \end{aligned} \quad (11)$$

が得られる.

式 (3) は平均値に対して成り立たねばならないので,

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{v} + \overline{F_{rx}^*} = \frac{d\bar{u}}{dt} \\ &-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f \bar{u} + \overline{F_{ry}^*} = \frac{d\bar{v}}{dt} \end{aligned} \quad (12)$$

が成り立つ. 渦動を含む流れに対する式 (10) および (11) は平均場に対する式 (12) の右辺に風速の摂動同士の相関に関する加速度が付加された形となっている. 渦動が存在するために式 (10) および (11) 右辺に新たに現れた加速度を左辺に移項して力 (この力を以後, 渦動性摩擦力と呼ぶ) として表現すると,

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} + \bar{F}_{rx}^* + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{u'u'})}{\partial x} \\
& + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{u'w'})}{\partial z} = \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (13) \\
& -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} + \bar{F}_{ry}^* + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{v'u'})}{\partial x} \\
& + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{v'v'})}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{v'w'})}{\partial z} = \frac{d\bar{v}}{dt}
\end{aligned}$$

となる。ここで、分子運動による粘性摩擦力  $\bar{F}_r^*$  と渦動性摩擦力の和を  $\bar{F}_r = (F_{rx}, F_{ry})$  と表記すると、式 (13) は

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} + F_{rx} = \frac{d\bar{u}}{dt} \\
& -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} + F_{ry} = \frac{d\bar{v}}{dt} \quad (14)
\end{aligned}$$

と表される。ここで  $\bar{F}_r = (F_{rx}, F_{ry})$  は

$$\begin{aligned}
F_{rx} &= F_{rx}^* + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{u'u'})}{\partial x} \\
& + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{u'w'})}{\partial z} \quad (15) \\
F_{ry} &= F_{ry}^* + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{v'u'})}{\partial x} \\
& + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{v'v'})}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{v'w'})}{\partial z}
\end{aligned}$$

である。ただし、標準大気状態において動粘性係数は  $\frac{\mu}{\rho} = 1.46 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$  と極小であるため、分子運動による粘性摩擦力  $\bar{F}_r^*$  は鉛直シアが極めて大である地表面近傍数cm以外では無視できるので、事実上、常に

$$\begin{aligned}
F_{rx} &= \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial \rho \overline{u'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \rho \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \rho \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \\
F_{ry} &= \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial \rho \overline{v'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \rho \overline{v'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \rho \overline{v'w'}}{\partial z} \right) \quad (16)
\end{aligned}$$

であり、 $\bar{F}_r$  は渦動性摩擦力と同等と扱えることになる。これは、分子運動による粘性摩擦力の10000倍以上の大きさとなり得て、渦動応力とも呼ばれる (小倉 1978)。摂動の自乗の平均は空気塊面の法線方向に作用し法線応力乃至は力学的圧力と呼ばれ、異なる摂動同士の積の平均は空気塊面の接線方向に作用し接線応力と呼ばれる (小倉 1978)。

式 (16) は大気中の摩擦力であるが、大気下端の地表面との間にも大きな摩擦力が生じる。現地観測で地表面摩擦力を実測するのは困難であるが、風洞実験での測定は実用化されている。

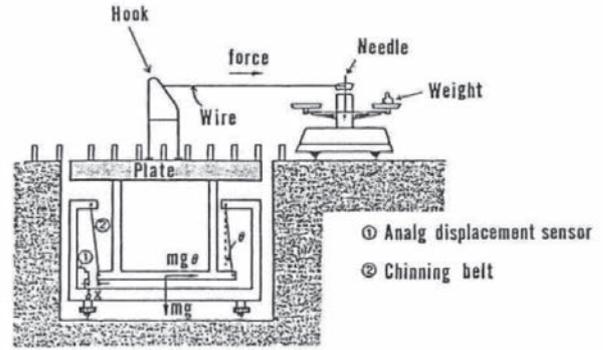


図1 地表面摩擦応力の測定原理 (林ほか 1988)

注記①中の Analg (出典のまま) は Analog の間違いと史料される

図1は、風洞床面の高さに設置された面積  $A$  の受感面を支柱で支えて乗せた台を長さ  $l$  のベルトで吊り下げた振子の水平変位  $\Delta l$  を測定して、受感面に作用する摩擦応力  $\tau$  を

$$\tau = \frac{mg}{Al} \Delta l \quad (17)$$

として検出するドラッグメータの概念図である (林ほか 1988)。ここで、 $m$  : 台を含む吊下げられた装置全体の質量、 $g$  : 重力加速度である。受感面上に固定したフックと繋がった分銅を乗せた上皿天秤はキャリブレーションのための装置である。

式 (16) の渦動性摩擦力のうち最も大きいのは第3項であり、地表面  $z=0$  近傍ほどその傾向は著しく、地表面と大気との運動量交換に大きく貢献するのは乱流輸送の鉛直収束である。大気層中の任意水平面を通過する  $x$  方向の運動量  $\rho \bar{u}$  の向上フラックス密度  $\rho \overline{uw}$  は、レイノルズ分解により、

$$\rho \overline{uw} = \rho \overline{(\bar{u} + u')(\bar{w} + w')} = \rho \overline{u'w'} \quad (18)$$

と表すことが出来る。任意水平面の上方には  $\rho \overline{u'w'}$  の運動量が流入し、輸送された運動量に等しい接線応力  $\tau_x = -\rho \overline{u'w'}$  が単位水平面積あたりに生じ、レイノルズ応力と呼ばれる。式 (16) をレイノルズ応力と呼ぶ文献もあり混乱を生じさせているが、式 (16) の次元が  $[\text{LT}^{-2}]$  であるのに対してレイノルズ応力  $\tau_x$  の次元は  $[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}]$  であり、両者は全く別の物理量なので注意を要する。

レイノルズ応力  $\tau_x = -\rho \overline{u'w'}$  は渦動粘性係数 (乱流拡散係数)  $K_m$  を用いて

$$\tau_x = -\rho \overline{u'w'} = \rho K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (19)$$

と表されることもある (ブジネスクの仮定).  $\tau_x$  はレイノルズ応力であると同時に, 下向きの運動量フラックスとも解釈される.

式 (16) 右辺第3項は, 上向きの運動量フラックスの収束  $-\frac{\partial \rho \overline{u'w'}}{\partial z}$ ,  $-\frac{\partial \rho \overline{v'w'}}{\partial z}$  により大気に摩擦力が作用することを意味している. 大気最下端とその下の地表面の間では, 地表面では  $u = v = w = 0$  なので, 大気から下方へ輸送された運動量  $-\rho \overline{u'w'}$ ,  $-\rho \overline{v'w'}$  がそのまま地表面を水平に引っ張る摩擦力となる. 林ほか (1988) は, 風洞内で式 (19) により  $\frac{d\bar{u}}{dz}$  から見積もった  $\tau_x$  と, 式 (17) によるドラッグメータ測定値から見積もった  $\tau$  が, ほぼ 1 : 1 の関係であることを確認した.

Prandtl (1925) は,  $u' > 0$  を, 平均風速の鉛直勾配のあるもとで, 風速の大きい方から粒子が鉛直に距離  $\ell$  だけ移動することと考え,

$$u' = -\ell \frac{d\bar{u}}{dz} \quad (20)$$

と表現した. ここで,  $\ell$  : 混合距離である. 混合距離  $\ell$  は粒子の移動距離であり, 渦サイズに対応している. 更に Prandtl (1925) は, 表面近傍では混合距離  $\ell$  は小さいと考えて,

$$\ell = \kappa z \quad (21)$$

と仮定した (プラントルの仮定). ここで,  $\kappa$  : カルマン定数 (=0.4) である.

地表面近傍の乱渦は等方性と見做し

$$u' = w' = -\ell \frac{d\bar{u}}{dz} \quad (22)$$

が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} \frac{\tau_x}{\rho} &= \overline{u'w'} = \overline{\left(-\ell \frac{d\bar{u}}{dz}\right) \left(-\ell \frac{d\bar{u}}{dz}\right)} \\ &= \left(\kappa z \frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2 \end{aligned} \quad (23)$$

が成り立たねばならない. 式 (23) 両辺の平方根を求めると

$$\kappa z \frac{d\bar{u}}{dz} = \sqrt{\frac{\tau_x}{\rho}} = u_* \quad (24)$$

が成り立つことになる. ここで,  $u_*$  : 摩擦速度である.

摩擦速度  $u_*$  が高度によらず一定である層をコンスタントフラックス層と呼ぶ.  $u_* = \text{const.}$  となるコンスタントフラックス層では

$$d\bar{u} = \frac{u_* dz}{\kappa z} = \frac{u_*}{\kappa} d \ln z \quad (25)$$

を積分すると

$$\bar{u} - \bar{u}_0 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \quad (26)$$

という関係が求まる. ここで,  $z_0$  : 粗度であり, 式 (26) において  $\bar{u} = 0$  と見做せる高度と定義される. 即ち,  $\bar{u}_0 = 0$  であるから,

$$\bar{u} = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \quad (27)$$

が成り立つことになる. 式 (27) は大気成層が中立の場合の風の対数法則と呼ばれ, 風速  $\bar{u}$  が高度  $z$  の対数  $\ln z$  に比例し, 地表面に近いほど風速  $\bar{u}$  が小さくなることを意味している.

この風の対数法則は, 地表面の摩擦力により下層の風が減速されるために出現すると説く代表的な気象教育の教材となっている. 等方性乱流で運動量フラックス  $\overline{\rho u'w'}$  が一定なコンスタントフラックス層では地表面粗度より上空の風速鉛直分布は高度  $z$  の対数  $\ln z$  となる. 風速  $\bar{u}$  は, 高度  $z$  の対数  $\ln z$  に比例して上空ほど強風であり, 地上付近では少し高度  $z$  が高くなると著しく風速  $\bar{u}$  が増加し, 上空に行くほど高度  $z$  による風速  $\bar{u}$  の増加率  $\frac{d\bar{u}}{dz}$  は低下する. 粗度  $z_0$  が小さいほど地表面近傍における高度  $z$  による風速  $\bar{u}$  の増加率  $\frac{d\bar{u}}{dz}$  が大きい. 地表面近傍の風速  $\bar{u}$  を低下させている原因が粗度  $z_0$  による摩擦応力  $\tau_x = -\rho \overline{u'w'}$  であると説く.

空気塊は, 自身の上の空気塊と下の空気塊双方との間に  $x$  方向に異なるレイノルズ応力  $\tau_x = -\rho \overline{u'w'}$  を受けるため,  $x$  方向に分子運動による摩擦力  $F_{r,x}^*$  とは別の摩擦力  $F_{r,x}$

$$F_{r,x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} = \frac{K_m}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = -\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \quad (28)$$

を受けることになる. 同様に,  $y$  方向の分子運動による摩擦力とは別の摩擦力  $F_{r,y}$  は

$$F_{r,y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = \frac{K_m}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} = -\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \quad (29)$$

ということになる. これらは, 分子運動による粘性摩擦力  $\vec{F}_r^*$  を無視した式 (16) の渦動性摩擦力  $\vec{F}_r = (F_{r,x}, F_{r,y})$  の第3項と同等である. このため, 空気塊が受ける摩擦力は, 空気塊が受けるレイノルズの接線応力の中の最も顕著な成分の鉛直収束と同等であると見做すことができる.

式 (28) および (29) より, 摩擦力  $\vec{F}_r$  は, レイノル

ズ応力  $\tau_x = -\rho \overline{u'w'}$  および  $\tau_y = -\rho \overline{v'w'}$  が存在し、しかもその鉛直勾配  $-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}$  および  $-\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}$  が存在するとき、顕著に作用するということになる。  $u', v', w'$  は風の乱流成分であるから、摩擦力  $\vec{F}_r$  は乱流が発生していなければ出現し得ないが、乱流が発生していても、  $u'$  と  $w'$  の変動に相関が無ければ出現し得ず、  $u'$  および  $v'$  と  $w'$  の変動に相関  $\overline{u'w'}$  があっても、その相関  $\overline{u'w'}$  に鉛直勾配  $\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}$  が無ければ出現し得ない、ということになる。

気象学では、地表面の摩擦の影響を無視できない大気最下層部分を大気境界層と呼び、その上の大気層を自由大気と呼び摩擦力を無視できる完全流体として扱う習慣がある。この場合の無視できない摩擦力のほとんどは粘性摩擦力ではなく乱流に起因する渦動性摩擦力であるため、大気境界層は乱流層で、その上に広がる自由大気は層流層であるとの誤謬を生じさせる可能性がある。自由大気は決して層流ではなく、重力波をはじめとする様々な波動に満ちた乱流層であるが、乱流成分同士に相関が無い、相関があってもその相関に鉛直勾配が存在しない、ということ認識させることが極めて重要である。

### Ⅲ. 大気境界層内のバランス風における摩擦力

大気境界層における  $x, y$  方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} &= \frac{du}{dt} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} &= \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (30)$$

と表される。左辺第1項は気圧傾度力、第2項はコリオリ力、第3項は渦動性摩擦力を表し、右辺は加速度を表す。

気象学ではまず加速度が存在しないバランス風を扱うのが一般的であり、大気境界層の風は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} &= 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

を満足すると記載されている (Arya 1985)。しかしながら、教育的な観点からは、このような記載の仕方は問題があると思料される。バランス風は加速度が無いと仮定した場合に吹く風、つまり仮定の風であるが、初学者には、あたかも大気境界層では必ずバランス風になって

いるとの誤謬を起こさせてしまうことが危惧される。

バランス風は摩擦力を無視できる上層の自由大気でも想定でき、この場合のバランス風は地衡風と呼ばれる。

摩擦力の  $x, y$  成分は  $\left( -\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}, -\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right)$  であるから、摩擦力を無視できるのは自由大気が乱流の無い層流だからという訳ではなく、自由大気では乱流成分同士に相関が無い、相関があってもその相関に鉛直勾配が存在しないことを意味している。地衡風の  $x, y$  成分を、それぞれ  $u_g, v_g$  と表記すると、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv_g &= 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu_g &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

が成り立たねばならないので地衡風の  $x, y$  成分は直ちに、

$$\begin{aligned} u_g &= -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} \\ v_g &= \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (33)$$

となることが導かれると共に、気圧傾度力の  $x, y$  成分は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= -fv_g \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= fu_g \end{aligned} \quad (34)$$

となることが導かれる。

さて、Arya (1985) が指摘する如く、多くの気象学の教科書や論文が、摩擦力は風の真反対の方向に風速に比例して作用するとし、

$$\begin{aligned} F_{r,x} &= -\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = -ku \\ F_{r,y} &= -\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} = -kv \end{aligned} \quad (35)$$

と表記している。ここで、 $k$  : 比例定数である。摩擦力は風の真反対の方向に風速に比例して作用するとの仮定は、Guldberg and Mohn (1876) により初めて導入されたとされる (正野 1954, 1960)。正野 (1954, 1960) によると、式 (35) による表現は正しくないが、形式が簡単のため摩擦の影響を定性的に調べる際に使われることがある、とされている。式 (34) および (35) を式 (31) に代入すると

$$\begin{aligned} -fv_g + fv - ku &= 0 \\ fu_g - fu - kv &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

という表現が得られる。

図2に現在の我が国で最も良く読まれている小倉(1984)の教科書による大気境界層のバランス風における力の釣合いを示す。水平に等圧線が描画され、図の下方が高圧場 $H$ 、上方が低圧場 $L$ で、等圧線と $\alpha$ の角を成す方向に風 $V$ が吹走している。 $P_n$ が気圧傾度力、 $C$ がコリオリ力で、 $F$ が風 $V$ と真反対の方向に作用する摩擦力である。小倉(1984)はこれらの関係を

$$\begin{aligned} P_n \sin \alpha &= F \\ P_n \cos \alpha &= C = fV \\ \tan \alpha &= \frac{F}{fV} \end{aligned} \quad (37)$$

と表し、風 $V$ は、摩擦力 $F$ が存在しなければ $\alpha = 0$ となって地衡風となるが、摩擦力 $F$ が強くなるほど非地衡風が強くなり、等圧線を大きな角度 $\alpha$ で横切って高圧側から低圧側に風が吹走すると説いた。しかし、このような説明は読者に摩擦力 $F$ が運動方向とは真反対に作用するとの誤謬を与えることが懸念される(Arya 1985)。

島貫(1980)は、図3を用いて、摩擦力 $F$ が風 $V$ と真反対の方向に作用するとするのは間違いであることを、幾何学的に証明した。図3において、 $A$ が地衡風、 $B$ が気圧傾度力(図2の $P_n$ )、 $C$ が地衡風 $A$ によるコリオリ力、 $P$ が風(図2の $V$ )、 $Q$ が風 $P$ と真反対の方向に作用する摩擦力(図2の $F$ )を表している。

島貫(1980)は $\triangle POA$ と $\triangle ROC$ において

$$\angle POR = \angle AOC = \angle R \quad (38)$$

より

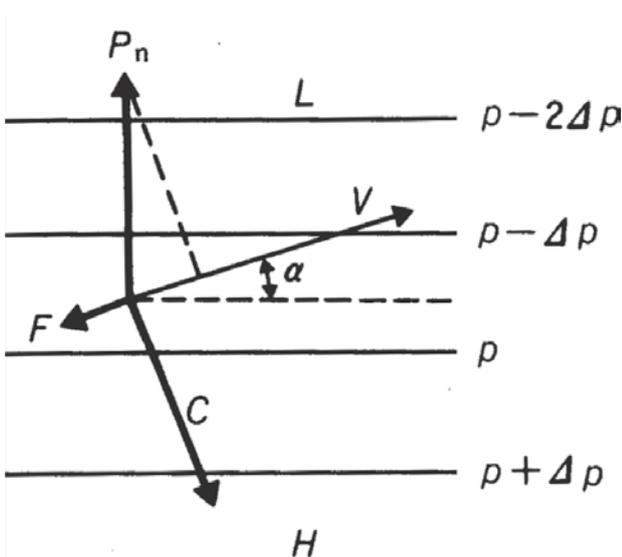


図2 小倉(1984)による大気境界層のバランス風における力の釣合い

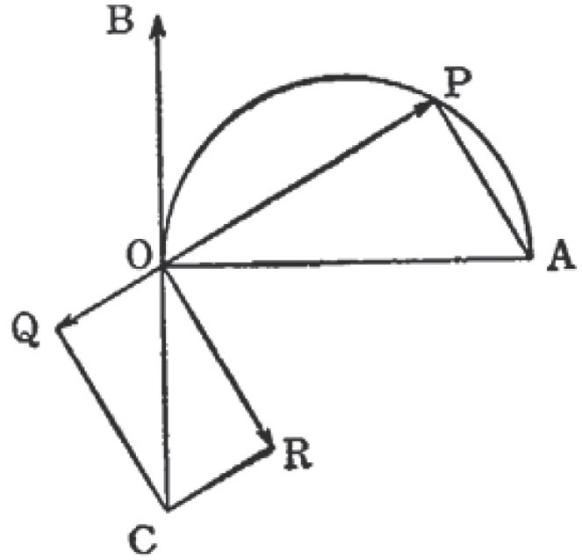


図3 島貫(1980)による大気境界層のバランス風における力の釣合い

$$\begin{aligned} \angle POA &= \angle ROC \\ \overline{OP} : \overline{OR} &= \overline{OA} : \overline{OC} = 1 : f \end{aligned} \quad (39)$$

なので、 $\triangle POA \sim \triangle ROC$ であるから、

$$\angle ORC = \angle OPA = \angle R \quad (40)$$

であることを証明した。つまり、円周角 $\angle OPA$ が常に直角となるため、摩擦力 $\overline{OQ}$ が運動 $\overline{OP}$ とは真反対方向の場合の風のホドグラフは円となり決して螺旋にはならないことを幾何学的に証明し、ホドグラフが良く知られた螺旋にはならないため、摩擦力は運動方向と真反対ではない旨、強く警鐘を鳴らした。

小倉(1984)の改訂版である小倉(1999)は、風ベクトル $\vec{v}$ と方向が $\delta$ ずれている場合の摩擦力 $\vec{F}$ の作図法を補記した。図4において、地衡風に対するコリオリ力 $\vec{C}_g$ と実際の風に対するコリオリ力 $\vec{C}$ の成分表示は

$$\begin{aligned} \vec{C}_g &= (0, -fv_g) \\ \vec{C} &= (fv \sin \alpha, -fv \cos \alpha) \end{aligned} \quad (41)$$

なので、摩擦力 $\vec{F} = \vec{C}_g - \vec{C}$ の成分表示は

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{C}_g - \vec{C} \\ &= (-fv \sin \alpha, -fv_g + fv \cos \alpha) \end{aligned} \quad (42)$$

となる。従って、摩擦力 $\vec{F}$ の大きさ $|\vec{F}|$ は

$$|\vec{F}| = fv \sqrt{1 + \left(\frac{v_g}{v}\right)^2 - 2\frac{v_g}{v} \cos \alpha} \quad (43)$$

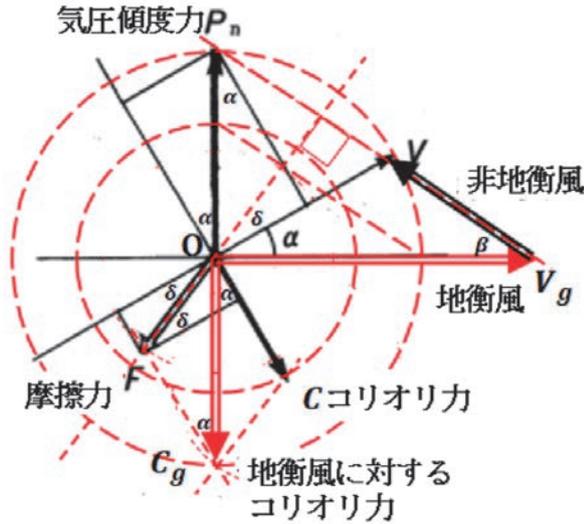


図4 小倉(1999)による風 $\vec{v}$ と真反対の方向から角度 $\delta$ ズレた摩擦力 $\vec{F}$ の描画

となる。摩擦力 $\vec{F} = \vec{c}_g - \vec{c}$ の成分表示より、摩擦力 $\vec{F}$ の地衡風方向からの勾配は

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \delta) &= \frac{-fv_g + fv \cos \alpha}{-fv \sin \alpha} \\ &= \frac{v_g - v \cos \alpha}{v \sin \alpha} \end{aligned} \quad (44)$$

となる。非地衡風 $\vec{v} - \vec{v}_g$ の成分表示は

$$\vec{v} - \vec{v}_g = (v \sin \alpha, v \cos \alpha - v_g) \quad (45)$$

なので、非地衡風 $\vec{v} - \vec{v}_g$ の地衡風方向からの勾配は

$$\tan \beta = \frac{v \sin \alpha}{v \cos \alpha - v_g} \quad (46)$$

となる。従って、摩擦力 $\vec{F}$ と非地衡風 $\vec{v} - \vec{v}_g$ の勾配の積は

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \delta) \tan \beta &= \frac{v_g - v \cos \alpha}{v \sin \alpha} \frac{v \sin \alpha}{v \cos \alpha - v_g} = -1 \end{aligned} \quad (47)$$

となり、摩擦力 $\vec{F}$ は非地衡風 $\vec{v} - \vec{v}_g$ に垂直左向きであることが明らかである。

Arya (1985) は摩擦力 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z}$ を

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} K_m \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} = 2\vec{\Omega} \times (\vec{V} - \vec{V}_g) \quad (48)$$

と表した。ここで、 $\vec{\Omega}$ :地球の自転ベクトルである。摩擦力 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z}$ は $2\vec{\Omega}$ と $\vec{v} - \vec{v}_g$ の外積であるから、非地衡風

$\vec{v} - \vec{v}_g$ の進行方向左90°の方向のベクトルである。Arya

(1985) による摩擦力 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z}$ の大気境界層内の高度別特徴は、Arya (2001) の教科書に掲載されたこともあり、広く周知されている。

摩擦力 $\vec{F}$ は非地衡風 $\vec{v} - \vec{v}_g$ に垂直左向き、ということで一件落着の印象を与えてしまうが、小倉(1999)もArya (1985) も摩擦力を理論的に演繹的に導いた訳ではなく、あくまでも大気境界層における3力によるバランスが成り立っている場合の気圧傾度力とコリオリ力の残差を求めただけであるから、大気境界層内を吹走する風がバランス風でなければこれらの表現が正しいことは保証されていないことに注意が必要である。

バランス風が吹走していることが事実であれば、加速度が存在しない訳であるから、風の hodograph は一切時間変化しないことになるが、海陸風に代表される様に、大気境界層の風は非定常できれいな日変化をするのが一般的である。このため大気境界層を吹走する風を完全なバランス風とすることは妥当ではないと思料される。

#### IV. 大気境界層内の非バランス風における摩擦力

##### 1. 定常気圧場で摩擦力が風と真反対の場合

前Ⅲ節では必ず定常状態、即ちバランス風となると仮定して議論したが、大気境界層で生起する諸現象はすべて時々刻々変化するのが一般的であり、非定常状態にあることは明白である。本節では、前Ⅲ節においてバランス風を議論する際に間違っているとして排除したにも関わらず、正野(1954, 1960)の指摘の如く、風向の真反対に作用する摩擦力を再登場させて、大気境界層内水平運動方程式を

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -fv_g + fv - ku \\ \frac{dv}{dt} &= fu_g - fu - kv \end{aligned} \quad (49)$$

とする。ここで、 $x$ は等圧線に平行な方向とする。風ベクトルを $w = u + iv$  ( $i$ :虚数単位)と表現すると、式(49)は、

$$\frac{dw}{dt} = \frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt} = -(if + k)w + ifu_g \quad (50)$$

と表される。これを、整理し微分演算子 $D = \frac{\partial}{\partial t}$ を用いて表記し直すと、

$$[D + (if + k)]w = ifu_g \quad (51)$$

となる。これは非斉次1階微分方程式であるから、基本解の1次結合 $W$ と特殊解 $\underline{w}$ を求め、両者の和 $W + \underline{w}$ として一般解 $w$ を求める必要がある。

式(51)の補助方程式

$$D + (if + k) = 0 \quad (52)$$

の解は

$$D = -(if + k) \quad (53)$$

なので、基本解の1次結合 $W$ は

$$W = Ce^{-(if+k)t} \quad (54)$$

となる。式(51)の特殊解 $\underline{w}$ は

$$\begin{aligned} \underline{w} &= \frac{1}{D + (if + k)} ifu_g e^{0t} \\ &= \frac{1}{0 + (if + k)} ifu_g = \frac{k - if}{k^2 - i^2 f^2} ifu_g \quad (55) \\ &= \frac{k - if}{k^2 + f^2} ifu_g = \frac{f^2 + ikf}{k^2 + f^2} u_g \end{aligned}$$

となる。従って、一般解 $w$ は

$$\begin{aligned} w &= W + \underline{w} \\ &= Ce^{-(if+k)t} + \frac{f^2 + ikf}{k^2 + f^2} u_g \quad (56) \end{aligned}$$

となるので、式(56)を成分表示すると

$$\begin{aligned} u &= Ce^{-kt} \cos ft + \frac{f^2}{k^2 + f^2} u_g \quad (57) \\ v &= -Ce^{-kt} \sin ft + \frac{kf}{k^2 + f^2} u_g \end{aligned}$$

が得られる。

式(57)の右辺は2項からなっており、第1項は時間とともに減衰する時計回りの回転(北半球では $f > 0$ で時計回り)を表し、第2項は一定の風を表す。減衰を伴う第1項は時間が十分経過した暁には消滅してしまうため、式(57)は一定の風に収束することを示している。

もし摩擦が存在しない場合は、 $k = 0$ であるから、式(57)は、

$$\begin{aligned} u &= C \cos ft + u_g \\ v &= -C \sin ft \quad (58) \end{aligned}$$

となり、時計回りに回転する風と地衡風からなることを意味する。この時計回りの回転は慣性振動と呼ばれ、その角振動数がコリオリパラメータ  $f = 2\Omega \sin \varphi$  なので、慣性振動の周期  $T$  は

$$T = \frac{2\pi}{f} = \frac{\pi}{\Omega \sin \varphi} \quad (59)$$

となる。

もし摩擦が極めて大きい場合は、 $k = \infty$ であるから、式(57)右辺第1項はほぼ瞬間的に消滅してしまうため慣性振動は現れず、式(57)は

$$\begin{aligned} u &= \frac{f^2}{\infty + f^2} u_g = 0 \\ v &= \frac{kf}{k^2 + f^2} u_g = \frac{f}{\infty + \frac{f^2}{\infty}} u_g = 0 \quad (60) \end{aligned}$$

となり第2項も消滅してしまう。

もし摩擦が $k = \infty$ ではなく適度な大きさである場合は、式(57)の右辺第1項は減衰する時計回りの慣性振動(北半球では $f > 0$ で時計回り)となり、第2項の一定風と地衡風のなす角 $\alpha$ は

$$\tan \alpha = \frac{kf}{\frac{f^2}{k^2 + f^2} u_g} = \frac{k}{f} \quad (61)$$

となり、摩擦力が強くなるに従い大きくなって高圧側から低圧側に吹込むようになり、 $k \rightarrow \infty$ の時、一定風は消滅してしまうが、風向は地衡風左90°の方向になる。式(61)の $\tan \alpha$ は、式(37)の $\tan \alpha$ と全く同等となることは明白である。

## 2. 定常気圧場で摩擦力が風と真反対でない場合

式(50)における摩擦力 $-kw$ を、バランス風の時正しいとした非地衡風に垂直左向きの摩擦力 $if(w - u_g)$ に置き換えた場合、式(50)は

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= -ifw + if(w - u_g) + ifu_g \quad (62) \\ &= if(-w + w - u_g + u_g) = 0 \end{aligned}$$

となり、加速度は常に0となるため、風 $w$ の時間変化は絶対に発生しないことは明白である。

前Ⅲ節のバランス風の場合は、風の真反対の方向に摩擦力が働くとするのは間違いで非地衡風左90°の方向に摩擦力が働くのが正しいとしたが、本Ⅳ節の非バランス風の場合には、非地衡風左90°の方向に摩擦力が働くとバランス風になってしまう、という論理的矛盾が生じてしまう。この事実は、実際の摩擦力、つまり真の摩擦力 $\left(-\frac{\partial w}{\partial z}, -\frac{\partial v}{\partial z}\right)$ は風の真反対の方向に近く、かつ、非地衡風左90°の方向にも近い、という結論になってし

まう.

式 (50) における摩擦力 $-kw$ を  $K_m \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$  に置き換えた場合, 式 (50) は

$$\frac{dw}{dt} = -ifw + K_m \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} +ifu_g \quad (63)$$

となる. ここで, 定常状態を仮定すると,

$$K_m \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - ifw = -ifu_g \quad (64)$$

となる. これを, 微分演算子  $D_z = \frac{\partial}{\partial z}$  を用いて表記すると,

$$(K_m D_z^2 - if)w = -ifu_g \quad (65)$$

となる. これは非斉次2階微分方程式であるから, 基本解の1次結合 $W$ と特殊解 $\underline{w}$ を求め, 両者の和 $W + \underline{w}$ として一般解 $w$ を求める必要がある.

式 (65) の補助方程式

$$K_m D_z^2 - if = 0 \quad (66)$$

の解は

$$D_z = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{f}{K_m}} \quad (67)$$

なので, 基本解の1次結合 $W$ は

$$W = Ae^{\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{f}{K_m}} z} + Be^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{f}{K_m}} z} \quad (68)$$

となる. 式 (65) の特殊解 $\underline{w}$ は

$$\begin{aligned} \underline{w} &= \frac{1}{K_m D_z^2 - if} (-if)u_g e^{0z} \\ &= \frac{1}{-if} (-if)u_g = u_g \end{aligned} \quad (69)$$

となる. 従って, 一般解 $w$ は

$$\begin{aligned} w &= W + \underline{w} \\ &= Ae^{\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{f}{K_m}} z} + Be^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{f}{K_m}} z} + u_g \end{aligned} \quad (70)$$

となる.

境界条件は  $z = \infty$  で  $w = u_g$  なので,  $A = 0$  となる. もう一つの境界条件は  $z = 0$  で  $w = 0$  なので

$$0 = B + u_g \quad (71)$$

よって,  $B = -u_g$  となり, 解として

$$w = u_g \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{f}{2K_m}} z} e^{-i\sqrt{\frac{f}{2K_m}} z} \right) \quad (72)$$

が得られる. 式 (72) を成分表示すると

$$\begin{aligned} u &= u_g \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{f}{2K_m}} z} \cos \sqrt{\frac{f}{2K_m}} z \right) \\ v &= u_g e^{-\sqrt{\frac{f}{2K_m}} z} \sin \sqrt{\frac{f}{2K_m}} z \end{aligned} \quad (73)$$

が得られる. これは良く知られたエクマン螺旋の式である (例えば, Holton 1992). エクマン螺旋は地上から上方に向かう風のシアホドグラフに現れる軌跡であり, 特定の高度ではホドグラフの時間変化は現れない.

### 3. 日変化する気圧場で摩擦力が風と真反対の場合

式 (49) では等圧線は一切時間変化しないと仮定して議論したが, ここでは等圧線が海岸に平行で日変化する摩擦力が風と真反対の場合の海陸風の回転ホドグラフについて議論する. 式 (49) の議論の際には等圧線の方角には条件を課さなかったが, ここでは等圧線の方角は海岸線に平行で, その気圧傾度が日変化するという想定なので, 以下のような運動方程式を考えることとなる.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= fv - ku \\ \frac{dv}{dt} &= fu_g \cos \omega t - fu - kv \end{aligned} \quad (74)$$

式 (49) の場合と同様に,  $x$  は等圧線に平行な方向とする. 風ベクトルを  $w = u + iv$  ( $i$ : 虚数単位) と表現すると, 解かなければならない方程式は

$$[D + (if + k)]w = ifu_g \cos \omega t \quad (75)$$

となる. 式 (75) の基本解の1次結合 $W$ は式 (54) と同じく

$$W = Ce^{-(if+k)t} \quad (76)$$

となり, 特殊解 $\underline{w}$ は

$$\begin{aligned} \underline{w} &= \frac{1}{D + (if + k)} i \text{Re}[fu_g e^{i\omega t}] \\ &= \frac{1}{i\omega + (if + k)} i \text{Re}[fu_g e^{i\omega t}] \\ &= ifu_g \frac{\text{Re}[\{(if + k) - i\omega\} e^{i\omega t}]}{(if + k)^2 + \omega^2} \\ &= ifu_g \frac{(if+k) \cos \omega t + \omega \sin \omega t}{(if+k)^2 + \omega^2} \\ &= u_g \frac{2f^2 k + if(\omega^2 - f^2 + k^2)}{(\omega^2 - f^2 + k^2)^2 + (2fk)^2} \\ &\quad \times (k \cos \omega t + \omega \sin \omega t + if \cos \omega t) \end{aligned} \quad (77)$$

となる。従って、一般解  $w$  の成分表示は

$$\begin{aligned} u &= Ce^{-kt} \cos ft \\ &\quad + u_g \frac{2kf^2\omega \sin \omega t - f^2(\omega^2 - f^2 - k^2) \cos \omega t}{(\omega^2 - f^2 + k^2)^2 + (2fk)^2} \\ v &= -Ce^{-kt} \sin ft \\ &\quad + u_g \frac{\omega f(\omega^2 - f^2 + k^2) \sin \omega t + fk(\omega^2 + f^2 + k^2) \cos \omega t}{(\omega^2 - f^2 + k^2)^2 + (2fk)^2} \end{aligned} \quad (78)$$

となる。

大変複雑な構造であるが、摩擦力及び気圧日変化が存在しない場合には、 $k = \omega = 0$  なので、式 (78) は

$$\begin{aligned} u &= C \cos ft + u_g \\ v &= -C \sin ft \end{aligned} \quad (79)$$

となり、式 (79) の第 1 項は減衰無しの時計回りの慣性振動（北半球では  $f > 0$  で時計回り）を表し、第 2 項は地衡風を表す。

摩擦力は存在するが気圧日変化は存在しない場合には、 $k > 0$ 、 $\omega = 0$  なので、式 (78) は

$$\begin{aligned} u &= Ce^{-kt} \cos ft + u_g \frac{f^2}{f^2 + k^2} \\ v &= -Ce^{-kt} \sin ft + u_g \frac{fk}{f^2 + k^2} \end{aligned} \quad (80)$$

となる。式 (80) の第 1 項は減衰する時計回りの慣性振動（北半球では  $f > 0$  で時計回り）を表し、第 2 項は地衡風と角度  $\alpha$  で交わる一定風を表す。一定風が地衡風となす角  $\alpha$  は次式

$$\tan \alpha = \frac{fk}{f^2} = \frac{k}{f} \quad (81)$$

で定まり、これは摩擦力  $\vec{F}$  を  $\vec{F} = k\vec{v}$  と表記した時の式 (37) と同じである。このため、摩擦が無い  $k = 0$  の場合には  $\alpha = 0$  で地衡風そのものになり、摩擦が強くなるに従って、第 1 項の慣性振動は急速に減衰し、一定風が地衡風となす角  $\alpha$  は大きくなるのが明白である。

気圧日変化は存在するが摩擦力は存在しない場合には、 $k = 0$ 、 $\omega > 0$  なので、式 (78) は

$$\begin{aligned} u &= C \cos ft - u_g \frac{f^2 \cos \omega t}{\omega^2 - f^2} \\ v &= -C \sin ft + u_g \frac{\omega f \sin \omega t}{\omega^2 - f^2} \end{aligned} \quad (82)$$

となる。式 (82) の第 1 項は減衰なしの時計回りの慣性振動（北半球では  $f > 0$  で時計回り）を表し、第 2 項は時計回りの回転をする楕円ホドグラフ（北半球では  $f > 0$  で時計回り）を表す。第 1 項の慣性振動の周期は式 (59) により  $\frac{\pi}{\Omega \sin \varphi}$  となるので地球上の緯度  $\varphi$  により

異なるが、第 2 項の時計回りの楕円ホドグラフの回転周期は  $\frac{2\pi}{\omega}$  の 24 時間で一定である。緯度  $\varphi = 30^\circ$  では、慣性振動の周期も  $\frac{2\pi}{\Omega}$  の 24 時間となるため、極めて明瞭な海陸風の回転ホドグラフ（北半球では  $f > 0$  で時計回り）が出現すると予測される。

摩擦力も気圧日変化も存在する場合は、 $k > 0$ 、 $\omega > 0$  であるが、以上の考察より、この場合の式 (78) の軌跡は、第 1 項が減衰する時計回りの慣性振動（北半球では  $f > 0$  で時計回り）を表し、第 2 項が時計回りの回転をする楕円ホドグラフ（北半球では  $f > 0$  で時計回り）を表すことになる。

本稿の検討だけで、北半球では海陸風の回転ホドグラフが一般的には時計回りとなる（例えば、Haurwitz 1947, Schmidt 1947）ことを履修学生に理解させることは可能と史料される。現実の海陸風ホドグラフの回転は複雑で、反時計回りも見つかっており、その理論的究明も進んでいるが (Kusuda and Alpert 1983, Sakazaki and Fujiwara 2008)、その要因に摩擦力は関与していないと史料されるため、本稿ではこれ以上の言及はしないこととする。

第 1 筆者は四半世紀前、海陸風ホドグラフの回転の実態解明とそのメカニズムの究明に取り組んだ修論指導に当たった経験がある (阿部 1998)。海陸風ホドグラフの回転方向や離心率・長軸方向等を変動させるモデルの構築には成功したが、海陸風ホドグラフの日変化の観測値以外には具体的な定量的データを入手できなかったため学会発表等を躊躇してしまった。しかしその 10 年後に Sakazaki and Fujiwara (2008) が公表され、大変後悔した経験がある。

さすがに、初等気象教育において、大気境界層内の摩擦力という切り口から、これらの現象まで取り扱うのは無理であろうが、履修学生に興味・関心を持たせることに成功すれば卒論や修論として取り組む意欲を持たせることは不可能ではないように史料する。

## V. おわりに

本稿はまず、大気中における摩擦力は、分子運動による粘性摩擦力ではなく乱流による渦動性摩擦力であり、その主成分は鉛直下向の水平運動量フラックス密度の収束であることを明確に指導することを提唱した。その際、レイノルズ応力、地表面摩擦ドラッグとの区別を明確に指導すべきことを主張した。

次に、摩擦力の影響を無視することができない大気境界層内の気象に関する指導を行う際に、バランス風を扱う場合と非バランス風を扱う場合とで、摩擦力の扱い方に一貫性が無いことを指摘した。

自由大気を完全流体、大気境界層をそれとは異質な不完全流体として位置付けると、自由大気は層流で大気境界層は乱流であるとの誤謬を与えかねないので、自由大気も大気境界層も乱流で、水平方向の摩擦力の妥当な成分表示は  $\left(-\frac{\partial \bar{u} \bar{w}}{\partial z}, -\frac{\partial \bar{v} \bar{w}}{\partial z}\right)$  であることを明確にしたうえで、乱流があるか否かによって摩擦力の有無が決まるのではなく、乱流成分同士に相関があるか否か、乱流成分同士の相関に鉛直シアがあるか否かによって摩擦力の有無・程度が決まることを教育すべきであることを強調した。

摩擦力  $\left(-\frac{\partial \bar{u} \bar{w}}{\partial z}, -\frac{\partial \bar{v} \bar{w}}{\partial z}\right)$  の方向が風向と真反対の方向なのか、非地衡風進行方向左90°の方向なのか、その際、大きさは風速や非地衡風速に比例するのか否か議論を行った。その結果、バランス風の場合は、摩擦力  $\left(-\frac{\partial \bar{u} \bar{w}}{\partial z}, -\frac{\partial \bar{v} \bar{w}}{\partial z}\right)$  は非地衡風進行方向左90°の方向で、非地衡風速に比例するが、大気境界層の風の hodograph の時間変化・日変化が生じる場合には、摩擦力  $\left(-\frac{\partial \bar{u} \bar{w}}{\partial z}, -\frac{\partial \bar{v} \bar{w}}{\partial z}\right)$  は非地衡風進行方向左90°の方向で、非地衡風速に比例していないことを明確にし、摩擦力  $\left(-\frac{\partial \bar{u} \bar{w}}{\partial z}, -\frac{\partial \bar{v} \bar{w}}{\partial z}\right)$  の方向が風向と真反対の方向で大きさが風速に比例している場合、風の hodograph の時間変化・日変化は生じうるが、良く知られたエクマン螺旋は出現しないことを明確にした。

地表面との摩擦の影響は下層大気ほど著しく、上層大気では無視できる状態になる旨の記載は多くの教科書に見出すことができるが、その理由を明記しているものは見かけない。本稿の論理によれば、地表面から離れるほど摩擦の影響が小さくなるのは、乱流成分同士の相関自体が小さくなり、更には、乱流成分同士の相関の高度変化が小さくなるから、という観点を教育することが重要と思料される。

しかし、結局、摩擦力  $\left(-\frac{\partial \bar{u} \bar{w}}{\partial z}, -\frac{\partial \bar{v} \bar{w}}{\partial z}\right)$  の方向と風向との関係はどうなっているのか？ どのように指導するのが適切か？ については不明のままとなった。この

点は今後の課題としたい。

環境気象はほぼ例外なく大気境界層内で生起する現象なので摩擦力の影響を無視して環境気象学を学ばせ、その成果を以て環境問題に対応できる人材を養成することは不可能である。しかしながら、環境系や教員養成系に入学した気象学初学者に摩擦力について自力で議論できる能力を獲得させるのは極めて困難である。この課題の検討・解決は、立正大学環境システム学科のような環境系学部学科における気象教育の場における喫緊の課題である。

## 謝辞

本稿は、立正大学地球環境科学部環境システム学科において専任・非常勤通算19年間環境気象教育にたずさわってきた第1筆者とその後任者である第2筆者が教育法の改善を目指して検討を重ねた成果を、新型コロナ禍後初の対面型口頭発表会となった日本地理学会2022年度秋季学術大会気候セッションにおいて発表した内容をまとめたものである。同セッションで賜ったご助言・ご教示は本稿起草に大変役立った。また、匿名の査読者による2度に亘るコメントは原稿改良に大変役立った。記して深謝の意を表します。

## 文献

- 阿部信貴 1998: 『新潟県高田平野沿岸部における海陸風循環の日変化特性』上越教育大学大学院修士論文, 201p.
- American Meteorological Society 2022: friction. *Glossary of Meteorology*, <https://glossary.ametsoc.org/wiki/Friction>.
- Arya, S. P. 1985: The schematics of balance of forces in the planetary boundary layer. *Journal of Climate and Applied Meteorology* **24**: 1001~1002.
- Arya, S. P. 2001: *Introduction to Micrometeorology*, Academic Press, 415p.
- Guldberg, C. M. and H. Mohn 1876: *Études sur les Mouvements de l'Atmosphère, Première Partie*. Christiana, 39p.
- Haurwitz, B. 1947: Comments on the seabreeze circulation. *Journal of Meteorology*, **4**: 1~8.
- 林 陽生・成田浩一・鳥谷 均 1988: ドラッグ法による摩擦速度の評価. 農業気象, **44**: 45~48.
- Holton, J. R. 1992: *An Introduction to Dynamic Meteorology Third Edition*. Academic Press, 511p.
- Kusuda, M. and P. Alpert 1983: Anti-clockwise rotation of the wind hodograph, Part I: Theoretical study. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **40**: 487~499.
- 小倉義光 1978: 『気象力学通論』東京大学出版会, 249p.

- 小倉義光 1984 : 『一般気象学』 東京大学出版会, 314p.
- 小倉義光 1999 : 『一般気象学 [第2版]』 東京大学出版会, 308p.
- Prandtl, L. 1925 : Über die ausgebildete Turbulenz. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 5: 136~139.
- Sakazaki, T. and M. Fujiwara 2008: Diurnal variations in summertime surface wind upon Japanese plains: Hodograph rotation and its dynamics. *Journal of the Meteorological Society of Japan*, 86: 787~803.
- Salby, M. L. 1996: *Fundamentals of Atmospheric Physics*. Academic Press, 627p.
- Schmidt, F. H. 1947: An elementary theory of the land and sea breeze circulation. *Journal of Meteorology*, 4: 9~15.
- 島貫 陸 1980 : 『気象の理 環境科学へのアプローチ』 東洋館出版社, 166 p.
- 正野重方 1954 : 『気象力学序説』 岩波書店, 425 p.
- 正野重方 1960 : 『気象力学』 岩波書店, 284 p.

## A Note on the Treatment of Frictional Forces in the Atmospheric Boundary Layer in Meteorological Education

NAKAGAWA Kiyotaka\* and WATARAI Yasushi\*\*

\* Professor Emeritus of Rissho University/Professor Emeritus of Joetsu University of Education

\*\* Department of Environment Systems, Faculty of Geo-environmental Science, Rissho University

### Abstract :

The frictional force is one of the important forces in the learning of the atmospheric boundary layer meteorology. The present study investigated the treatment of frictional forces in the atmospheric boundary layer meteorology. As a result, it was clear that the frictional force is handled differently in the case of balanced winds and in the case of unbalanced winds.

The true friction force, which is treated as viscous friction due to molecular motion in the Navier-Stokes equation, is generally very small and is often ignored even if in the atmospheric boundary layer. If we take the time average after applying the perturbation method to the horizontal equations of motion, ignoring the viscous friction force, the so-called Reynolds stress appears. The vertical convergence of this stress can be regarded as vortex viscous friction. However, the frictional force is treated as normal to the ageostrophic wind vector in the case of balanced winds, while the frictional force is treated as opposite to the direction of the actual wind vector in the case of unbalanced winds. Neither the frictional force normal to the ageostrophic wind nor the frictional force opposite to the direction of the actual wind is accurate, but the correct quantitative direction of the frictional force has not yet been determined.

**Key words :** frictional force, atmospheric boundary layer, balanced wind, unbalanced wind