

# 太陽高度角公式の導出法に関する一考察

中 川 清 隆\*

キーワード：太陽高度角公式，導出，大気外全天日射量，太陽気候，ミランコビッチ理論

## I. はじめに

地表面が全て平坦な陸地で占められていて大気圏が存在しない時の気候は，地点緯度と季節により異なる全天日射量にのみ依存し，太陽気候 solar climate ないしは数理気候 mathematical climate と呼ばれ，全天日射量の緯度や時間に伴う変化を支配する法則が，Meech (1857) や Wiener (1879)，Angot (1886) 等によって調査されている (Hann 1903)。

Milankovitch (1920) は，全天日射量に関する既存の諸法則を再吟味したうえで，既存研究が考慮していなかった地表面温度を含む「日射が生み出す熱現象」を天体理論を用いて統一的に考究する「数理理論」を初めて提唱した。このミランコビッチ理論によると，大気外全天日射量  $K_{\infty}^{\downarrow}$  は

$$K_{\infty}^{\downarrow} = I_{\text{TOA}} \sin \alpha = I_0 \left( \frac{\bar{r}}{r} \right)^2 \sin \alpha \quad (1)$$

と表される。ここで， $I_{\text{TOA}}$ ：大気外直達日射強度， $I_0$ ：太陽定数， $r$ ：地心太陽距離， $\bar{r}$ ：平均地心太陽距離， $\alpha$ ：太陽高度角であり，相対地心太陽距離  $\frac{\bar{r}}{r}$  は

$$\frac{\bar{r}}{r} = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos(\theta - \theta_p)} \quad (2)$$

と表される。ここで， $e$ ：地球公転軌道離心率， $\theta$ ：太陽黄経， $\theta_p$ ：近日点黄経， $\theta - \theta_p$ ：近日点離角である。太陽高度角  $\alpha$  の正弦  $\sin \alpha$  は

$$\sin \alpha = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega t \quad (3)$$

と表され，太陽高度角公式 solar altitude angle formula と呼ばれる。ここで， $\varphi$ ：地点緯度， $\delta$ ：太陽赤緯， $\omega$ ：地球の自転角速度であり， $\omega t$ ：太陽時角 (=  $h$ , time angle) で，太陽が南中してからの地軸の周りの地球の回転角を意味し，南中後の経過時間  $t$  に比例する。太陽赤緯  $\delta$  は，地球軌道傾斜角  $\varepsilon$  と太陽黄経  $\theta$  との間に

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sin \theta \quad (4)$$

の関係がある。

日変化，年変化，±数百万年間の永年変化の様々な時間スケールにおいて，式 (1)～(4) は同様に成り立つ。日変化の時間スケールではもっぱら太陽時角  $h$  のみが  $\pm\pi$  の間を変化し，年変化の時間スケールでは  $0 \sim 2\pi$  の間の太陽黄経  $\theta$  変化に伴い太陽赤緯  $\delta$  のみが  $\pm 24.5^\circ$  の間を変化し，永年変化の時間スケールでは公転軌道離心率  $e$ ，軌道傾斜角  $\varepsilon$ ，および近日点黄経  $\theta_p$  の時間変化に伴い，大気外全天日射量  $K_{\infty}^{\downarrow}$  に氷期間氷期サイクルが生じる。Milankovitch (1920, 1930, 1941) は，現在では氷期間氷期サイクルを規定するミランコビッチ理論の三大成書として著名であるが，Milankovitch (1920) の当初の最重要課題は太陽系天体，特に火星や月の表面温度形成論の構築にあったことがその序文に明記されており，決して古気候変動に特化した書ではなかったことは明白である。

1958年の M. Milankovitch の死後忘れ去られていた同理論が1970年代に復活する際，氷期間氷期サイクルが生じるメカニズム論への貢献として復活したため (Hays et al. 1976)，上記3種類の時間スケールのうちの日変化や年変化スケールでの日射量の時間変化に関するミランコビッチ理論の貢献は復活しなかった。にも拘らず，現在の気象学・気候学において日射量の日変化・年変化に関して考究する際には，必ずと言って良いほど，ミランコビッチ理論の根幹をなす太陽高度角公式 (3) は既知の法則として議論が始まる。

筆者は立正大学において長年に亘り「微気象学」と「気候変動論」を隔年で担当してきた。「気候変動論」においては，ミランコビッチ理論を氷期間氷期サイクルの主因となる必須アイテムとして取り上げるものの，時間的制約のためその詳細には言及できなかった。その一方で，その翌年の「微気象学」においては，名著 Sellers (1965) の構成に沿って，先ず太陽日周運動に伴う地表面全天日射量の日変化から始めて，地表面熱収支の各項や地表面温度を初めとする大気境界層気象の日変化およ

\* 立正大学・名誉教授／上越教育大学・名誉教授



$$\vec{OS} = (\cos \alpha \sin \psi, \cos \alpha \cos \psi, \sin \alpha) \quad (9)$$

と表される。ここで、 $\psi$  : 太陽方位角であり、天頂 $Z'$ と天の北極 $Z$ を通る鉛直面と天頂 $Z'$ と太陽 $S$ を通る鉛直面のなす角である。

### III. ベクトルの内積を用いた太陽高度角公式の導出

図1において、原点 $O$ から天頂 $Z'$ までのベクトル $\vec{OZ}'$ と原点 $O$ から太陽 $S$ までのベクトル $\vec{OS}$ の内積は、ベクトル $\vec{OZ}'$ の大きさ $|\vec{OZ}'|$ ×ベクトル $\vec{OS}$ の大きさ $|\vec{OS}|$ ×なす角 $Z$ の余弦 $\cos Z$ であるが、両ベクトルの大きさは1なので、内積 $\vec{OZ}' \cdot \vec{OS}$ は

$$\begin{aligned} \vec{OZ}' \cdot \vec{OS} &= |\vec{OZ}'| |\vec{OS}| \cos Z \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \end{aligned} \quad (10)$$

ということになる。

ところで、この内積 $\vec{OZ}' \cdot \vec{OS}$ の $x, y, z$ 成分表示は、

$$\begin{aligned} \vec{OZ}' \cdot \vec{OS} &= (0, \cos \varphi, \sin \varphi) \\ &\quad \cdot (\cos \delta \sin h, \cos \delta \cos h, \sin \delta) \\ &= \cos \varphi \cos \delta \cos h + \sin \varphi \sin \delta \end{aligned} \quad (11)$$

と表され、式(10)と(11)の右辺同士が等しいので

$$\sin \alpha = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega t \quad (12)$$

となることが証明される。おそらくこれが最も簡潔な太陽高度角公式(3)の導出であるが、ベクトルの内積に関する知識が必須となる。

### IV. 座標変換を用いた太陽高度角公式の導出

上述の通り、図1において、原点 $O$ から太陽 $S$ までのベクトル $\vec{OS}$ の赤道直交座標 $x, y, z$ 成分は式(8)で表され、地平直交座標 $x', y', z'$ 成分は式(9)で表される。

赤道直交座標系 $(x, y, z)$ と地平直交座標系 $(x', y', z')$ の $x$ 軸は共通なので、常に

$$\cos \delta \sin h = \cos \alpha \sin \psi \quad (13)$$

が成立つとともに、赤道直交座標系 $(x, y, z)$ を $x$ 軸の回りを時計回りに $\varphi$ 回転させると地平直交座標系 $(x, y', z')$ に完全に重なる。このため、地平直交座標 $z'$ 成分は、図2の如く、赤道直交座標 $y, z$ 成分の地平直交座標 $z'$ 軸への正射影の和となり、地平直交座標 $z'$ 成分と赤道直交座標 $y, z$ 成分の間には

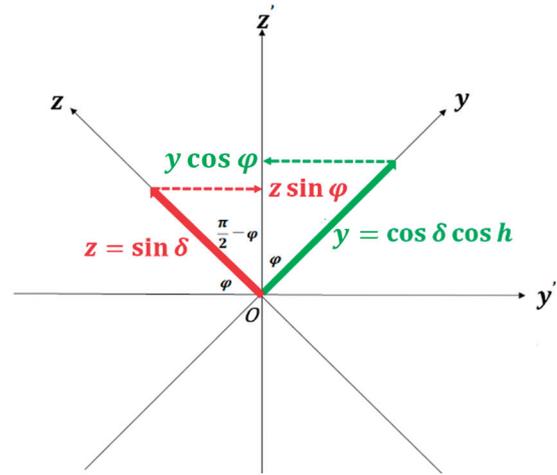


図2 赤道直交座標 $y, z$ 成分の地平直交座標系 $z'$ 軸への正射影

$$z' = z \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + y \cos \varphi \quad (14)$$

の関係が成立つ。

ここで、

$$z' = \sin \alpha \quad (15)$$

$$z = \sin \delta \quad (16)$$

$$y = \cos \delta \cos h \quad (17)$$

なので、式(14)に式(15)~(17)を代入すると、

$$\sin \alpha = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos h \cos \varphi \quad (18)$$

が成立つことになる。式(18)を整理すると

$$\sin \alpha = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega t \quad (19)$$

となるので、太陽高度角公式(3)は導出される。これも比較的簡潔な太陽高度角公式(3)の導出であるが、赤道直交座標系から地平直交座標系への座標変換に関する知識が必須となる。

### V. 球面三角関数の余弦定理を利用した太陽高度角公式の導出

図1において、天球上の3点、天の北極 $Z$ 、天頂 $Z'$ 、太陽 $S$ を結ぶと球面三角形 $\triangle ZZ'S$ が形成されるので、球面三角関数の定理を利用することができる。

平面三角形の場合には「三角形の3頂角の和は $180^\circ$ 」という定理が成立つが、球面三角形の場合には「三角形の3頂角の和は $180^\circ$ 」とはならない。

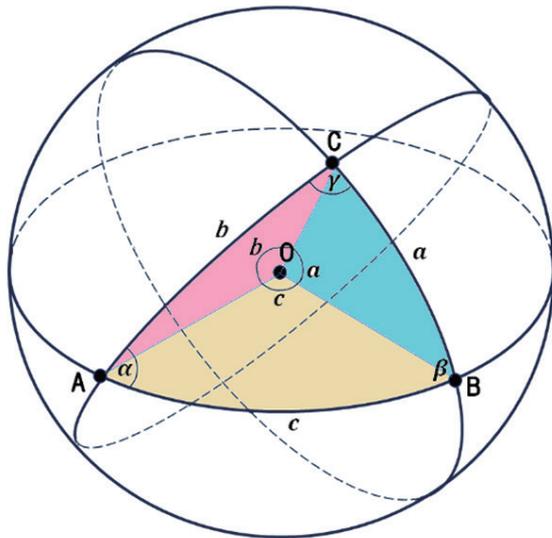


図3 球面三角形△ABCの頂角と内角の関係

例えば、北極点と赤道上的の東経0°地点、赤道上的の東経90°地点の3点を結ぶ球面三角形を考えてみよう。北極点から赤道上的の東経0°地点の方向と北極点から赤道上的の東経90°地点の方向のなす角は90°であり、赤道上的の東経0°地点においても東経90°地点においても赤道方向と北極点方向のなす角は90°なので、「北極点と赤道上的の東経0°地点、赤道上的の東経90°地点の3点を結ぶ球面三角形の3頂角の和は90°×3=270°」となり、「三角形の3頂角の和は180°」とはならない。

図3の如く、半径が1で中心がOの球の表面上の3点A, B, Cにより球面三角形△ABCが形成されているとする。Regiomontanus (1464) が整備した球面三角法によると、中心Oから3円弧BC, CA, ABを見込む角の大きさを、それぞれ、 $a, b, c$ 、球面三角形△ABCの弧ABを含む平面と弧CAを含む平面のなす角、弧ABを含む平面と弧CAを含む平面のなす角、弧ABを含む平面と弧CAを含む平面のなす角を、それぞれ、 $\alpha, \beta, \gamma$  とすると、3円弧BC, CA, ABの長さは、それぞれ、 $a, b, c$  と表され、3頂角 $\alpha, \beta, \gamma$ の余弦は、それぞれ、

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \quad (20)$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \quad (21)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \quad (22)$$

と表され、式(20)～(22)は球面三角法余弦定理と呼ばれる(例えば、森口ほか1966参照)。

今、図3の点A, C, Bを、それぞれ、天球上の天の北極Z, 天頂Z', 太陽Sとすると、

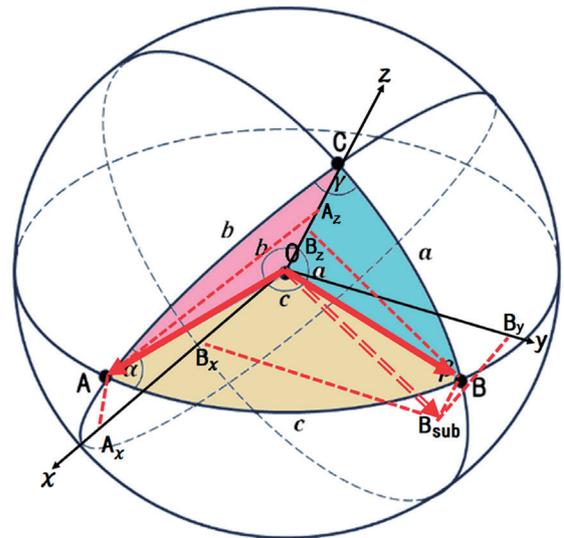


図4 図3のCAを通る大円とBCを通る大円の交線をz軸としてCAを通る大円面をxz面とし、xz面に垂直にy軸をとったxyz直交座標系と球面三角法余弦定理の関係

$$a = h = \omega t \quad (23)$$

$$a = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (24)$$

$$b = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (25)$$

$$c = \frac{\pi}{2} - \delta \quad (26)$$

となる。ここで、 $\alpha$  : 太陽高度角、 $\varphi$  : 観測地点緯度、 $\delta$  : 太陽赤緯である。これらを、式(20)に代入すると、

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos h \quad (27)$$

となるので、 $\cos h$ 以外の正弦・余弦を余角の余弦・正弦に書き直すと式(27)は

$$\sin \alpha = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos h \quad (28)$$

となり、太陽高度角公式(3)が導出される。

現在の気象学初学者に最もよく読まれている小倉(1984, 1999)も、同様の記載の仕方をしているが、この方法による導出の際には、球面三角法に関する知識が必須となる。

球面三角法余弦定理は定理なので、数学の解答としては森口ほか(1966)等を引用しながら「球面三角関数の余弦定理より明らか」という論法で全く問題はないものの、太陽高度角公式(3)は球面三角法余弦定理そのもののような式なので、同定理を自分で証明できないので

は教育的には真に理解したとは言い難い。そこで、本稿では、球面三角法余弦定理の証明を試みることにする。

図4は、図3の原点Oから点Cの方向にz軸、点Cと点Aを通る大円CA上に原点Oからz軸に垂直な方向にx軸、x軸とz軸両方に垂直な方向に原点Oからy軸を引いてxyz直交座標系を設定し、点Aのx軸およびz軸への垂線の足を、それぞれ、点A<sub>x</sub>および点A<sub>z</sub>、点Bのz軸およびxy面への垂線の足をそれぞれB<sub>z</sub>および点B<sub>sub</sub>として表したものである。

∠AOA<sub>x</sub>は∠AOC = bの余角なので、

$$\angle AOA_x = \frac{\pi}{2} - b \quad (29)$$

となり、

$$OA_x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin b \quad (30)$$

$$OA_z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos b \quad (31)$$

と表せる。

∠BOB<sub>sub</sub>は∠BOC = aの余角なので、

$$\angle BOB_{sub} = \frac{\pi}{2} - a \quad (32)$$

と表せ、線分OBのxy面への正射影の長さOB<sub>sub</sub>は

$$OB_{sub} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a \quad (33)$$

となるので、線分OBのz軸への正射影の長さOB<sub>z</sub>は

$$OB_z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a \quad (34)$$

と表される。大円CAはxz面上にあり、大円CAと大円BCのなす角がγなので、点B<sub>sub</sub>のx軸およびy軸への垂線の足を、それぞれ、点B<sub>x</sub>および点B<sub>y</sub>とすると

$$\angle B_x OB_{sub} = \gamma \quad (35)$$

$$\angle B_y OB_{sub} = \frac{\pi}{2} - \gamma \quad (36)$$

と表せるため、

$$OB_x = \sin a \cos \gamma \quad (37)$$

$$OB_y = \sin a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin a \sin \gamma \quad (38)$$

となる。

ベクトル $\overline{OA}$ と $\overline{OB}$ の大きさは $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = 1$ で、ベクトル $\overline{OA}$ と $\overline{OB}$ のなす角∠AOBは∠AOB = cなので、ベクトル $\overline{OA}$ と $\overline{OB}$ の内積 $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ は

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = |\overline{OA}| |\overline{OB}| \cos c = \cos c \quad (39)$$

ということになる。一方、ベクトル $\overline{OA}$ および $\overline{OB}$ のx, y, z成分表示は、それぞれ、

$$\overline{OA} = (\sin b, 0, \cos b) \quad (40)$$

$$\overline{OB} = (\sin a \cos \gamma, \sin a \sin \gamma, \cos a) \quad (41)$$

なので、ベクトル $\overline{OA}$ と $\overline{OB}$ の内積 $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ のx, y, z成分表示は、

$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{OB} &= (\sin b, 0, \cos b) \\ &\cdot (\sin a \cos \gamma, \sin a \sin \gamma, \cos a) \\ &= \sin a \sin b \cos \gamma + \cos a \cos b \end{aligned} \quad (42)$$

とも表すことができる。式(39)と式(42)の左辺同士は等しいので右辺同士も等しいため、

$$\cos c = \sin a \sin b \cos \gamma + \cos a \cos b \quad (43)$$

が成立つことになる。式(43)は右辺の第1項と第2項を入れ替えれば式(22)と全く同等となるので、球面三角法余弦定理は証明される。

上記の手順で、先ず球面三角法余弦定理そのものを証明した後に、式(23)～式(28)の論理展開により太陽高度角公式(3)を導出しても一向に構わないが、大変冗長な論述になってしまう。そこでⅢ節においては、球面三角法余弦定理を一切持ち出さずに、直接原点Oから天頂Z'までのベクトル $\overline{OZ'}$ と原点から太陽Sまでのベクトル $\overline{OS}$ の内積を求めて、太陽高度角公式(3)の導出を行った。

## VI. 平面三角関数の余弦定理を用いた太陽高度角公式の導出

次に、球面三角法や赤道座標から地平座標への座標変換を用いず、平面三角法のみを用いる太陽高度角公式(3)の導出について、記載する。

図5は半径が1で中心がOの地球で、N:北極点、S:太陽直下点、Z:観測地点、ON:地軸、大円EQT:赤道とする。図1、3の球は天球を表しているのに対して、図5の球は地球を表しているので、注意が必要である。天球も地球も地軸の回りを回転角速度ωで回転しているが、天球は地軸の回りを東→南→西方向に回転し、地球は地軸の回りを、逆に、西→南→東方向に回転している。大円NZQは観測地点Zを通る子午線で、∠ZOQ:観

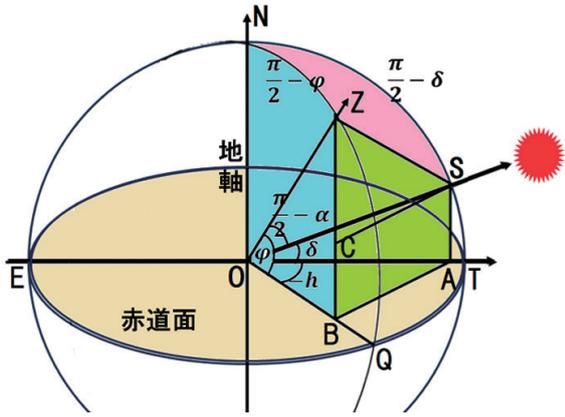


図5 北半球の観測点Zと太陽直下点Sを結ぶ線分ZSとその赤道面への正射影BAにより形成される直台形SABZと太陽高度角 $\alpha$ 、太陽赤緯 $\delta$ 、太陽時角 $h$ の関係

観測地点緯度（ $= \varphi$ ）である。大円NSTは太陽直下点Sを通る子午線で、 $\angle ZOS$ ：太陽天頂角（ $= \frac{\pi}{2} - \alpha$ ）、 $\angle SOT$ ：太陽赤緯（ $= \delta$ ）である。地球は地軸ONの回りをE $\rightarrow$ Q $\rightarrow$ T方向に角速度 $\omega$ で自転しており、観測地点Zはあと $h$ 回転すると太陽南中となるため、 $\angle TOQ = -h$ は時角と呼ばれる。太陽直下点Sの赤道面への正射影を点A、時角 $-h$ の時の観測地点Zの赤道面への正射影を点B、太陽直下点Sの線分ZBへの垂線の足をCとする。線分SAおよびZBは、共に赤道面に垂直なのでSA $\parallel$ ZBとなり、四角形SABZは $\angle SAB = \angle ABZ = \angle R$ の直台形となり、これは線分SCにより長方形SABCと $\angle ZCS = \angle R$ の直角三角形 $\triangle ZCS$ に分割される。

$\angle SOT = \delta$ なので、

$$SA = CB = \sin \delta \quad (44)$$

$$OA = \cos \delta \quad (45)$$

となる。また、 $\angle ZOB = \varphi$ なので、

$$ZB = \sin \varphi \quad (46)$$

$$OB = \cos \varphi \quad (47)$$

となる。従って、

$$ZC = ZB - CB = \sin \varphi - \sin \delta \quad (48)$$

となる。

図5では偶然 $AB \perp OQ$ のようにも見えるが、OAおよびOBの長さは $\angle TOQ = -h$ に係わらず常に一定なので、時角 $-h$ の絶対値が大きくなるほど線分ABの大きさが大きくなり $\angle OBA$ の大きさが大きくなるため、

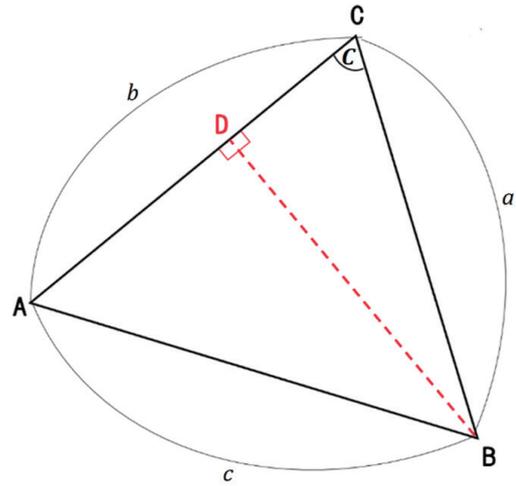


図6  $\triangle ABC$ における平面三角関数の余弦定理の概念図

$AB \perp OQ$ となるのは

$$\angle TOQ = -h = \cos^{-1} \left( \frac{OB}{OA} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{\cos \varphi}{\cos \delta} \right) \quad (49)$$

の関係を満足する特別の時角 $\angle TOQ = -h$ の時だけであることに注意が必要である。

ここで、平面三角関数の余弦定理を用いるので、先ず図6を用いて、平面三角関数の余弦定理について簡単に論述する。図6の如く、平面三角形 $\triangle ABC$ の3頂点をA、B、Cとし、それぞれの対辺を $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、頂点Cの内角 $\angle ACB$ の大きさをCとする。

頂点Bから辺CAへの垂線の足を点Dとすると、 $\triangle ABC$ は線分BDにより $\angle BDA = \angle CDB = \angle R$ の二つの直角三角形 $\triangle ABD$ と $\triangle BCD$ に分割され、

$$CD = a \cos C \quad (50)$$

$$BD = a \sin C \quad (51)$$

なので、

$$AD = CA - CD = b - a \cos C \quad (52)$$

となり、直角三角形 $\triangle ABD$ にピタゴラスの定理（三平方の定理）

$$AD^2 + BD^2 = AB^2 \quad (53)$$

を適用すると、

$$(b - a \cos C)^2 + a^2 \sin^2 C = c^2 \quad (54)$$

が得られる。式(54)左辺の( )を展開すると、

$$b^2 - 2ab \cos C + a^2 \csc^2 C + a^2 \sin^2 C = c^2 \quad (55)$$

となるので, これを整理すると,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad (56)$$

が得られる. 式 (56) は平面三角法余弦定理と呼ばれる.  $\angle BCA = \angle R$ , 即ち  $C = \frac{\pi}{2}$  の場合には, 式 (56) は

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{2} = a^2 + b^2 \quad (57)$$

となって, ピタゴラスの定理となるため, ピタゴラスの定理は, 2 辺  $a$ ,  $b$  の夾角  $C$  が直角の時の特別な平面三角法余弦定理と見做すことができる.

さて, 改めて図 5 の赤道面上の  $\triangle AOB$  に平面三角法余弦定理

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos(\angle TOQ) \quad (58)$$

を適用すると

$$OA = \cos \delta \quad (59)$$

$$OB = \cos \varphi \quad (60)$$

$$\angle TOQ = -h \quad (61)$$

なので,

$$AB^2 = \cos^2 \delta + \cos^2 \varphi - 2 \cos \delta \cos \varphi \cos(-h) \quad (62)$$

となり, かつ, 四角形  $SABC$  は長方形であるため,

$$AB = SC \quad (63)$$

なので,

$$SC^2 = \cos^2 \delta + \cos^2 \varphi - 2 \cos \delta \cos \varphi \cos(-h) \quad (64)$$

が成立つ.

$\triangle ZCS$  は直角三角形なので, ピタゴラスの定理より

$$SC^2 + ZC^2 = ZS^2 \quad (65)$$

が必ず成り立ち, 式 (65) 左辺に式 (64) および式 (48) を代入すると

$$\cos^2 \delta + \cos^2 \varphi - 2 \cos \delta \cos \varphi \cos(-h) + (\sin \varphi - \sin \delta)^2 = ZS^2 \quad (66)$$

となる. 式 (66) 左辺の ( ) を展開すると

$$\cos^2 \delta + \cos^2 \varphi - 2 \cos \delta \cos \varphi \cos(-h) + \sin^2 \varphi + \sin^2 \delta - 2 \sin \varphi \sin \delta = ZS^2 \quad (67)$$

となるので, これを整理すると

$$2 - 2 \cos \delta \cos \varphi \cos(-h) - 2 \sin \varphi \sin \delta = ZS^2 \quad (68)$$

が得られる.

しかるに,  $\triangle ZOS$  に平面三角法余弦定理を適用すると

$$OZ = 1 \quad (69)$$

$$OS = 1 \quad (70)$$

$$\angle ZOS = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (71)$$

より,

$$ZS^2 = OZ^2 + OS^2 - 2OZ \cdot OS \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 - 2 \sin \alpha \quad (72)$$

であるため, 式 (68) と式 (72) の値は等しく,

$$2 - 2 \cos \delta \cdot \cos \varphi \cos(-h) - 2 \sin \varphi \sin \delta = ZS^2 = 2 - 2 \sin \alpha \quad (73)$$

が成立つ. 式 (73) の両辺から 2 を減じたうえで  $-2$  で除せば

$$\cos \delta \cos \varphi \cos(-h) + \sin \varphi \sin \delta = \sin \alpha \quad (74)$$

が得られる.

式 (74) を  $\sin \alpha$  について解いて整理すると,

$$\sin \alpha = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos h \quad (75)$$

となり, 太陽高度角公式 (3) が導かれる.

この方法によれば, 球面三角法や座標変換, ベクトル内積に関する知識がなくても, 平面三角法余弦定理のみを用いて太陽高度角公式 (3) を導くことが可能である. しかしながら, この方法は, Ⅲ節~Ⅴ節の 3 通りの導出に比べて記載内容が多くなってしまいうえに, 相当程度の幾何学的な鍛錬の蓄積がないと, 適切な補助線を描画したうえで平面三角形の  $\triangle AOB$  と  $\triangle ZOS$  に対する余弦定理の適用を思いつくことは容易ではない. このため, 本稿で示したⅢ節~Ⅵ節の 4 通りの導出の中では, Ⅵ節の方法は基礎知識があっても最も複雑で面倒な導出手順となっていると思料される.

## VII. 福井 (1938) の作図による太陽高度角公式の説明

最後に本節では, 筆者が大変興味を持っているものの, 実際の授業では扱ったことがない, 福井 (1938) によるユニークな説明について記述する. 前節までは角の記号の統一に努めたが, 本節では統一ミス防止も兼ねてあえて福井 (1938) 記載の記号のままとする.

福井 (1938) は 20 世紀における我が国を代表する気候学者の代表的著作であり, ミランコビッチ理論に関して

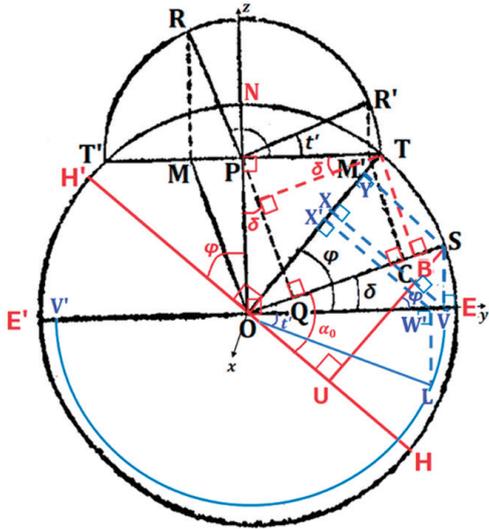


図7 福井（1938）が用いた太陽高度角公式説明用の図  
 黒色の線と記号は福井（1938）によるもので、  
 朱書および青色の線と記号は筆者による補記

最も詳細な説明を行っている文献として周知の文献である。その第2章数理気候の第17節（節番号は第1章からの通番）太陽の高さと晝間時間において、福井（1938）は、何の証明も引用もすることなく、「一般に太陽の高さ  $h$  は、その土地の緯度  $\varphi$ 、太陽の赤緯  $\delta$  および時角  $t$  の関数で次式

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \quad (76)$$

で与えられる」と断言している。式 (76) は、Milankovitch (1920, 1930, 1941) のそれぞれ第6, 4, 200式と同等の式であるため、Milankovitch (1920, 1930) の紹介の体裁をとっている福井（1938）は、あえて証明を記載することなく所与の事実として記載したものと史料される。

福井（1938）は、証明することなく唐突に式 (76) が成立つと宣言した後、「福井（1938）第12図の如く、赤緯  $\delta$  緯度  $\varphi$  に等しく  $OT, OS$  を描き、点  $T$  を点  $P$  に対して時角  $t'$  だけ回転させた点  $R'^{(1)}$  の  $PT$  への垂線の足  $M'$  の  $OS$  への垂線の足を点  $C$  とすると、 $OC$  が  $\sin h$  となる」として、 $\sin h$  の値は図7の如く簡単な作図により求めることができる旨説明している。大変ユニークな説明の仕方であるが、福井（1938）は、得られた  $OC$  の長さが式 (76) 右辺と同じになることを示しただけで、これが太陽高度角  $h$  の正弦  $\sin h$  であることは一切証明していない。

福井（1938）の説明は、図7が何を表しているのかさえ記載していない。太陽赤緯  $\delta$  緯度  $\varphi$  が明示されているので、円  $STT'$ ：地球ないしは天球、点  $O$  を通る直径：赤道、 $OP, OT, OS$ ：それぞれ北極星、天頂および太陽

方向、点  $S$ ：太陽、点  $T$ ：天頂、点  $P$ ：緯度  $\varphi$  における半径  $\cos \varphi$  の緯円の中心であることは明らかである。円  $STT'$  と  $T$  および  $T'$  で交わる半円  $TR'RT'$  は点  $P$  の回りを点  $T$  が回転した軌跡で、 $PM'$  は  $PT$  が時角  $t'$  だけ回転した  $PR'$  の  $TT'$  への正射影なので、

$$PT = \cos \varphi \quad (77)$$

$$PM' = \cos \varphi \cos t' \quad (78)$$

$$R'M' = \cos \varphi \sin t' \quad (79)$$

$$OP = \sin \varphi \quad (80)$$

となる。これらは、 $\overrightarrow{OT}$  および  $\overrightarrow{OR'}$  の赤道直交座標系  $y, z$  成分で、時角  $t'$  が変化する際、 $\overrightarrow{OS}$  を固定したまま  $\overrightarrow{OT}$  を変化させていることから、福井（1938）は図7の球を地球と仮定しており、点  $T$  が太陽南中時の天頂であることは明白である。

図7の黒色の線と記号は福井（1938）第12図に示されているものであるが、本稿はそれだけでは証明の記載に不足する補助線や記号を朱書および青色で補記した。

まず、点  $O$  を通る直径の両端を点  $E$  と点  $E'$ 、円弧  $ESTT'E'$  と  $OP$  の交点  $N$  を北極とする。点  $O$  を原点として手前方向、 $OE$  方向、 $ON$  方向に、それぞれ、 $x, y, z$  軸をとり、点  $S$  の  $y$  軸への垂線の足を点  $V$  とすると、 $\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OS}$  および  $\overrightarrow{OR'}$  の赤道直交座標系  $x, y, z$  成分表示は、それぞれ、

$$\overrightarrow{OT} = (0, \cos \varphi, \sin \varphi) \quad (81)$$

$$\overrightarrow{OS} = (0, \cos \delta, \sin \delta) \quad (82)$$

$$\overrightarrow{OR'} = (\cos \varphi \sin t', \cos \varphi \cos t', \sin \varphi) \quad (83)$$

と表せる。

次に、太陽南中時（時角  $t' = 0$ ）の高度角  $\alpha_0$  を明確にするため、 $OT$  に垂直に地平線  $HH'$  を描き、点  $S$  の  $HH'$  への垂線の足を点  $U$  とすると、 $\angle HOS$  が太陽南中時における太陽高度角  $\alpha_0$  なので、

$$\angle HOS = \alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi + \delta \quad (84)$$

$$SU = \sin \alpha_0 \quad (85)$$

が成立つ。従って、

$$\begin{aligned} \sin \alpha_0 &= \sin \left( \frac{\pi}{2} - \varphi + \delta \right) = \cos(\varphi - \delta) \\ &= \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta \end{aligned} \quad (86)$$

となる. 式 (86) 右辺に式 (77) と (80) を代入すると

$$\sin \alpha_0 = PT \cos \delta + OP \sin \delta = QB + OQ = OB \quad (87)$$

となり,  $\sin \alpha_0$  の値は, OP の OS への正射影 OQ と PT の OS への正射影 QB との和, 即ち  $OB = OQ + QB$  に等しい.

太陽南中時 (時角  $t' = 0$ ) でない時は, 天頂  $R'$  は太陽を通る子午面から時角  $t'$  だけ方向がずれた子午面上にあるため,  $\overrightarrow{OR'}$  の赤道直交座標系  $x, y, z$  成分表示は式 (83) となる.  $\overrightarrow{OR'}$  と  $\overrightarrow{OS}$  のなす角  $\angle R'OS$  が太陽天頂角なので太陽高度角  $\alpha$  の余角  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  となるため, 太陽南中時 (時角  $t' = 0$ ) でない時の太陽高度角  $\alpha$  は, 太陽南中時 (時角  $t' = 0$ ) の高度角  $\alpha_0$  とは明確に異なる.

$\overrightarrow{OR'}$  と  $\overrightarrow{OS}$  の内積  $\overrightarrow{OR'} \cdot \overrightarrow{OS}$  は,  $\overrightarrow{OR'}$  と  $\overrightarrow{OS}$  のなす角  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR'} \cdot \overrightarrow{OS} &= |\overrightarrow{OR'}| |\overrightarrow{OS}| \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \\ &= (\cos \varphi \sin t', \cos \varphi \cos t', \sin \varphi) \cdot \\ &\quad (0, \cos \delta, \sin \delta) \end{aligned} \quad (88)$$

と表せる. ここで,  $|\overrightarrow{OR'}| = |\overrightarrow{OS}| = 1$  だから式 (88) は

$$\sin \alpha = \cos \varphi \cos t' \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta \quad (89)$$

と同等であり, 式 (89) に式 (78) と (80) を代入すると,

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= PM' \cos \delta + OP \sin \delta \\ &= OQ + QC = OC \end{aligned} \quad (90)$$

となり,  $\sin \alpha$  の値は, OP の OS への正射影 OQ と  $PM'$  の OS への正射影 QC との和, 即ち OC に等しい. よって, 福井 (1938) の説明「点  $R'$  の PT への垂線の足  $M'$  の OS への垂線の足を点 C とすると, OC が  $\sin \alpha$  となる」は証明された.

以上の如く, 福井 (1938) の説明は正しいのであるが, 福井 (1938) 以外にはこのような説明を見出し難いのは, この説明方法が, 地平座標系から赤道座標系への座標変換になっているためと思料される. 座標変換を用いるこの種の問題では, 赤道座標成分の地平座標系の天頂成分への変換が用いられることが一般的であるからと思料される.

今, 福井 (1938) とは逆に, 地球は回転せず天球上の太陽 S が地球と反対方向に地軸の回りを回転していると仮定しよう. この場合, 図 7 において天頂 T は固定され太陽 S の回転に合わせて太陽の赤道面への垂線の足 V が, 点 O を中心とする半径  $\cos \delta$  の赤道面上の円上を回転する. 点 S が  $z$  軸の回りを時角  $t'$  だけ回転した点を点  $S'$  とし,

点  $S'$  の赤道面  $xy$  面への垂線の足を点 L, 点 L の  $y$  軸への垂線の足を  $W'$  とすると,

$$OW' = \cos \delta \cos t' \quad (91)$$

$$LW' = \cos \delta \sin t' \quad (92)$$

$$SV = \sin \delta \quad (93)$$

となるので,  $\overrightarrow{OS'}$  の赤道直交座標系  $x, y, z$  成分表示は,

$$\overrightarrow{OS'} = (\cos \delta \sin t', \cos \delta \cos t', \sin \delta) \quad (94)$$

となる.  $\overrightarrow{OT}$  と  $\overrightarrow{OS'}$  のなす角  $\angle TOS'$  が太陽高度  $\alpha$  の余角  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  となるため,  $\overrightarrow{OT}$  と  $\overrightarrow{OS'}$  の内積  $\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{OS'}$  は,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{OS'} &= |\overrightarrow{OT}| |\overrightarrow{OS'}| \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha \\ &= (0, \cos \varphi, \sin \varphi) \cdot \\ &\quad (\cos \delta \sin t', \cos \delta \cos t', \sin \delta) \\ &= \cos \varphi \cos t' \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta \end{aligned} \quad (95)$$

となり, 式 (95) に式 (91) と (93) を代入すると,

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= OW' \cos \varphi + SV \sin \varphi \\ &= OX' + XY \end{aligned} \quad (96)$$

となるので,  $\sin \alpha$  の値は,  $OW'$  の OT への正射影  $OX'$  と  $SV$  の OT への正射影  $XY$  との和  $OX' + XY$  に等しいことが導かれる.

数学的には, 式 (90) と式 (96) は同値であるからどちらでも構わないが, 福井 (1938) の如く図式作業により  $\sin \alpha$  の値に相当する長さを得ようとするとき, 式 (96) の方法は作図が面倒でかつ OT 上の正射影の  $X'$  と  $X$  の間に隙間ができてしまうのに対して, 式 (90) の方法は点  $R'$  の PT への垂線の足  $M'$  の OS への垂線の足 C を求めるだけで  $\sin \alpha$  の値に相当する長さ OC が得られて作図が相対的に容易であるために, 式 (90) が選択されたものと思料される.

## VIII. 既存の文献における太陽高度角公式の取扱

本節では既存の文献における太陽高度角公式の取扱を概観する. 出版の年代や国が異なるため文献ごとに用語や記号, 座標系が本稿 VI 節までとは異なるものが散見されるが, 原典の忠実な採録を優先して, あえて原典のままの記号で示すので, 注意されたい.

太陽高度角公式を明示している既存の文献で最古のものはおそらく Meech (1857) である. Meech (1857) は, 太陽高度角を  $A$  で表し, pp.13~15 の第 3 節 Law of the sun's intensity at any instant during the day (日中の任

意の時間における日射強度の法則)において,  
 “To determine the value of  $\sin A$ , by spherical trigonometry, the sun’s angular distance from the pole, or co-declination, the arc from the pole to the zenith, or co-latitude, and the included hour-angle from noon are given to find the third side or co-altitude. Writing, therefore, sines instead of the cosines of their complements,

$$\sin A = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos H."$$

と記載している。ここで、 $L$ ：地点緯度、 $D$ ：太陽赤緯、 $H$ ：太陽時角であり、この式は式(3)と同等である。Meech (1857) は by spherical trigonometry (球面三角法による) としか記載しておらず天球図も示していないが、文面から球面三角法余弦定理によることは明らかである。正に、本稿V節の球面三角関数の余弦定理を利用した太陽高度角公式の導出と同等の論理展開であるが、独自の球面三角法余弦定理の証明は行っていない。

Angot (1886) は、p.6において、天球図も示さずに、太陽高度角  $h$  について、  
 “Dans un lieu de latitude  $\lambda$ , et à une époque de l’année ou la déclinaison du Soleil est  $\delta$ , la hauteur  $h$  du Soleil au temps  $t$  est donnée par la formule

$$\sin h = \sin \lambda \sin \delta + \cos \lambda \cos \delta \cos t."$$

と記載している。ここで、 $\lambda$ ：地点緯度、 $\delta$ ：太陽赤緯、 $t$ ：太陽時角であり、この式は式(3)と同等である。球面三角法に関する言及はないが、文面から球面三角法余弦定理に依存していることは明らかである。Angot (1886) も、本稿V節の球面三角関数の余弦定理を利用した太陽高度角公式の導出と同等の論理展開であるが、独自の球面三角法余弦定理の証明は行っていない。

Milankovitch (1920) は、pp.8~13の第2節 Rappel de quelques notions et formules d’astronomie sphérique (球面天文学のいくつかの概念と公式に関する備忘録)において、図8の如く、地平面、黄道面、天の赤道面の3面と天球上の球面三角形 $\triangle NZS$ を示したうえで、球面三角法の良く知られた公式により、

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega \quad (97)$$

で示される太陽高度角公式が成立つとしている。ここで、 $z$ ：太陽天頂角、 $\varphi$ ：地点緯度、 $\delta$ ：太陽赤緯、 $\omega$ ：太陽時角である。太陽天頂角  $z$  は太陽高度角  $\alpha$  の余角であるから、式(97)は式(3)と同等である。これも、本

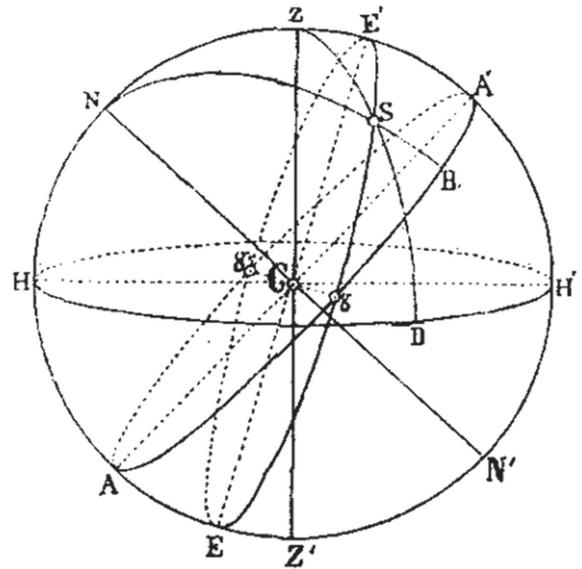


図8 Milankovitch (1920) が用いた天球の球面三角形 $\triangle NZS$

稿V節の球面三角関数の余弦定理を利用した太陽高度角公式の導出と同等の論理展開であるが、独自の球面三角法余弦定理の証明は行っていない<sup>2)</sup>。

ところで式(97)に瑕疵はないものの、図8、即ちMilankovitch (1920) 第1図には、明らかに不自然な箇所が存在する。大円ESE'で表される黄道は天球上の1年間の太陽の軌跡であるから、大円ABA'で表される天の赤道とは春分点と秋分点で交わる。春分の日および秋分の日には、地球上あらゆる地点において太陽は地表面真東の方向から日出して真西の方向に日没するので、黄道ESE'と天の赤道ABA'は春分点と秋分点において地平線HDH'とも交わらなくてはならない。しかるに、図8では、黄道ESE'と地平線HDH'および天の赤道ABA'と地平線HDH'は春分点および秋分点とは異なる地点で地平線と交わっていて、明らかに矛盾しているので、注意が必要である。

Humphreys (1940) は、pp.87~101の第4章 Insolation (日射)において、図9の如く、地球大気表面に北極点N、観測地点P、太陽直下点Vで構成される球面三角形 $\triangle NPV$ を示したうえで、何の証明もしないまま大気外全天日射量を

$$I \cos \alpha = I(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos h) \quad (98)$$

と断言している。ここで、 $I$ ：大気外直達日射強度、 $\alpha$ ：太陽天頂角(=  $\angle POV$ )、 $h$ ：太陽時角である。Humphreys (1940) は球面三角法余弦定理には一切言及していない。図9の弧CPの長さが地点緯度 $\varphi$ 、弧DVの長さが太陽

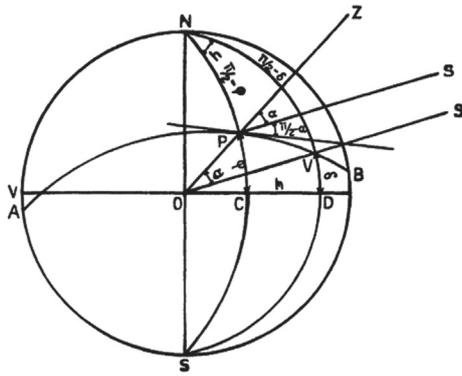


図9 Humphreys (1940) が用いた大気表面球面三角形△NPV

赤緯  $\delta$ , 弧PVの長さが太陽天頂角  $\alpha$  に相当しているが, 赤道が円弧表現されていないため理解し難い側面がある.

Sellers (1965) は, pp.11~39の第3章Solar Radiation (日射) において, Humphreys (1940) から導出したとして, 図10の如く, 地球大気表面に北極点N, 観測地点P, 太陽直下点Xで構成される球面三角形△NPXを示したうえで, 球面三角法から

$$\cos Z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos h \quad (99)$$

となるとしている. ここで,  $Z$ : 太陽天頂角である.

Humphreys (1940) は太陽天頂角を  $\alpha$  と表記したが, Sellers (1965) は, Milankovitch (1920) 同様, 太陽天頂角を  $Z$  と表記しているため, 混乱しないよう注意が必要である. Sellers (1965) も, Milankovitch (1920) や Humphreys (1940) と同様, 本稿V節の球面三角関数の余弦定理を利用した太陽高度角公式の導出と同等の論理であるが, 独自の証明は行わず, 球面三角法余弦定理の名称も出していない.

Visconti (2001) は, pp.39~61の第3章Radiation: The

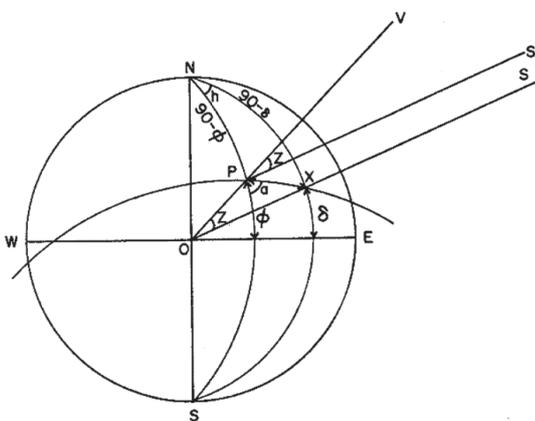


図10 Sellers (1965) が用いた大気表面球面三角形△NPX

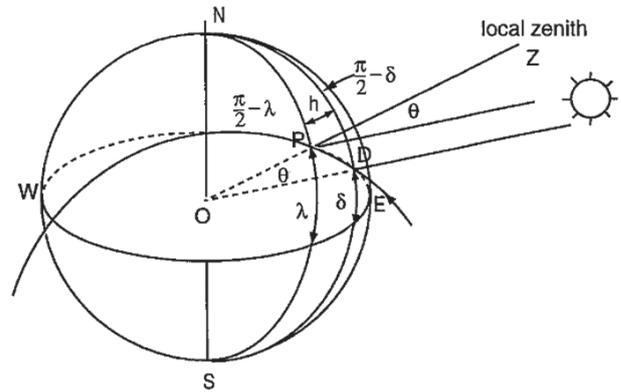


図11 Visconti (2001) が用いた大気表面球面三角形△NPD

first step (放射の第1段階) において, Sellers (1965) からの引用として, 図11の如く, 地球赤道面を楕円表示に変更したうえで, 地球大気表面に北極点N, 観測地点P, 太陽直下点Dで構成される球面三角形△NPDが,

$$\cos \theta = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos h \quad (100)$$

の関係を持つとしている. ここで,  $\theta$ : 太陽天頂角である. 地点緯度は, 図11では  $\lambda$  と表記されているにも係わらず, 式 (100) では  $\varphi$  と表記されており, 明らかな誤記であるので, 注意を要する. 図8および9の赤道面は一本の直線で表現されているのに対して, 図10の赤道面は楕円表記されている点は改善点と評価することができるが, 独自の証明は行わず, 球面三角法余弦定理の名称も出していない.

我が国の既存の文献の中で太陽高度角公式を最初にきちんと記載したのは, 岡田 (1935) と思料される. 岡田 (1935) は, pp.329~338の第16章日照において, 図12を

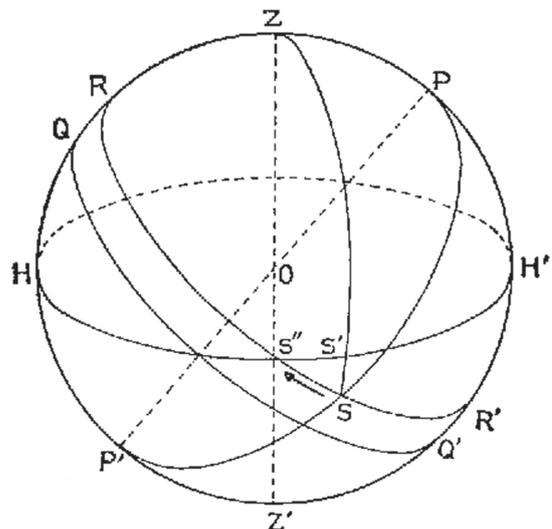


図12 岡田 (1935) が用いた天球面三角形△PZS

示しながら、球面三角形△PZSにおいて、「球面天文学の式

$$\cos ZS = \sin ZP \sin PS + \cos ZP \cos PS \cos ZPS \quad (101)$$

が成立つ」と断言している。ここで、Z：天頂、P：天の北極、S：太陽直下点である。図9～11のHumphreys (1940) の流れに沿う地球大気表面の球面三角形とは異なり、図12は図8のMilankovitch (1920) と同様、天球上の球面三角形を想定しているように思料され、「球面天文学の式」とは球面三角法余弦定理のことと思料されるが、引用表記は勿論、数学的な導出や証明に関する記載も一切ない。この当時の岡田武松の著作を紐解いてみると、A. Angotの業績の引用が多いので、図12もA. Angotの文献からの引用の可能性が高いと思料される。そこで、文献をいくつか当たってみたものの、未だ引用元を特定できずにいる。

Libbey (1884) はA. Guyotの気象表・物理表の最終版p.711で図13 (a) を示したうえで太陽高度角公式として次式

$$\cos ZS = \sin ZP \sin PS + \cos ZP \cos PS \cos ZPS \quad (102)$$

を示している。式 (102) は辺を内角とする表記法やその記号まで式 (101) と全く同一であるが、球面三角法余弦定理への言及はない。その9年後、Smithsonian Institution (1893) がA. Guyotの気象表・物理表を大幅に改訂して*Smithsonian Meteorological Tables*の発行を開始した<sup>3)</sup>。図13 (b) はSmithsonian Institution (1893) の第61表のクレジットの中に掲載されている地平座標による天球図であり、Smithsonian Institution (1918) までは同じ図が掲載されている。図12と全く同一とは言えないものの、構図や記号が極めて類似しているので、図13 (b) は図12と同じ系統の図と思料される。しかしながら、

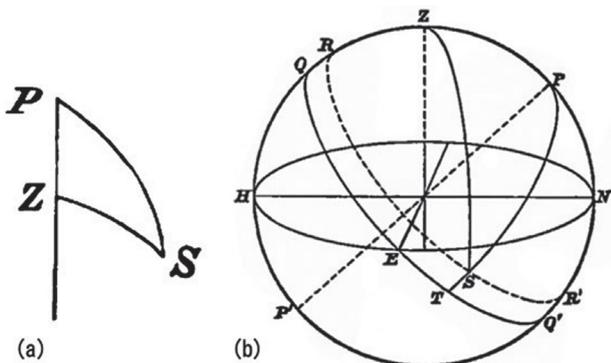


図13 W. Libbeyが (a) Libbey (1884) と (b) Smithsonian Institution (1893) において太陽高度角公式を求める際に用いた天球面三角形△PZS

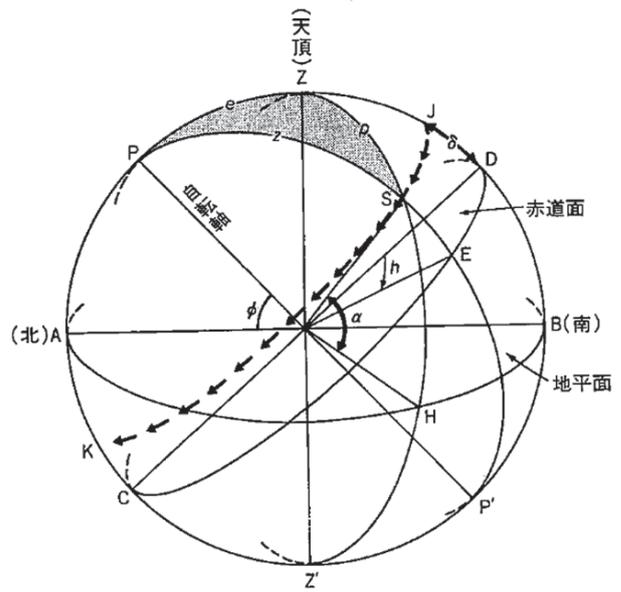


図14 小倉 (1984) が用いた天球面三角形△PZS

が、第61表はW. Libbeyにより計算されているため、図13 (b) も同氏製作の可能性はあるが、引用表記は一切示されていないうえに、Libbey (1884) が示している式 (102) のような太陽高度角公式は示されていない。

我が国の気候学者で独自の太陽高度角公式の説明を試みたのは、福井 (1938) のみである。福井 (1938) は、pp.47～64の第2章数理気候において、何らの証明も引用もすることなく、「一般に太陽の高さ  $h$  は

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \quad (103)$$

によって与えられる」と宣言している。ここで、 $h$ ：太陽高度角、 $t$ ：太陽時角である。さらに福井 (1938) は、Ⅶ節の福井 (1938) の太陽高度角公式の作図による説明で示した如く、何の説明もなく、「式 (103) の  $\sin h$  の値は福井 (1938) 第12図 (図7) の如く簡単な作図で求めることができる」と主張している。大変魅力的ではあるが、福井 (1938) には  $OC = \sin h$  となることの証明は記載されていないので、注意を要することはⅦ節に記載した通りである。また、福井 (1938) 第2章数理気候には、天球図は一切示されていないため、同書の記載のみから太陽高度角公式の導出を理解するのは困難と思料される。

現在の気象・気候学徒に最もよく読まれている小倉 (1984, 1999) は太陽高度角公式 (3) については比較的详细に説明しているものの引用表記は一切ない。小倉 (1984) は、pp.109～136の第5章大気における放射において、図14を示しているが、引用表記はない。図14は、図9～11のHumphreys (1940) の流れに沿う地平座標

系による地球大気表面の球面三角形とは異なり、図12～13のSmithsonian Institution (1893) の流れに沿う地平座標系による天球上の球面三角形となっているが、地表面方位が逆で、図の右側が真南の地平線方向となっている。小倉 (1984) は、「球面三角形の公式から、天頂Z、天の北極Pおよび太陽直下点Sからなる球面三角形△PZSにおいて、

$$\sin \alpha = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos h \quad (104)$$

が成立つ」と断言している。ここで、 $\alpha$  : 太陽高度角、 $h$  : 太陽時角である。球面三角形の公式として球面三角法余弦定理が明記されているが、球面三角形△PZSが認識されれば太陽高度角公式 (3) は自明、との論陣を張っている。

以上概観した如く、本節で取り上げた内外7篇の気象学の文献においては、福井 (1938) を除く6篇が、天頂Z、天の北極Pおよび太陽直下点Sで構成される球面三角形△ZPSを指摘したうえで、何らの証明を行うことなく「太陽高度角公式 (3) が成立つ」と論じている。これは、本稿V節の球面三角関数の余弦定理を利用した太陽高度角公式の導出の方法のうち、球面三角法余弦定理の証明は独自に行わない方法である。V節で指摘した通り、球面三角法余弦定理は定理なので、数学の解答としては森口ほか (1966) 等を引用しながら「球面三角関数の余弦定理より明らか」という論法で全く問題はないものの、太陽高度角公式 (3) は球面三角法余弦定理そのもののような式なので、同定理を自分で証明できないのでは、真に理解したとは言いがたい。気象学の講義の中で時間を割いて、純然たる数学定理である球面三角法余弦定理の証明を行う余裕はないが、宿題課題等で証明に挑戦させる等の措置が教育的には極めて有益と史料される。

## IX. おわりに

本稿は、ミランコビッチ理論の根幹をなす式 (1) ～ (4) の中でも中枢となる太陽高度角公式 (3) を単なる既知の公式として引用するのではなく、履修学生が自力で証明ないしは導出できるよう指導することの有用性を強調した。そのうえで、ベクトルの内積を用いた導出 (Ⅲ節)、赤道座標系から地平座標系への座標変換を用いた導出 (Ⅳ節)、球面三角関数の余弦定理を用いた導出 (Ⅴ節)、平面三角関数の余弦定理を用いた導出 (Ⅵ節)、および福井 (1938) の説明 (Ⅶ節) の5通りの太陽高度角公式 (3) 導出手順を比較的詳細に記載した。

上記5通りの証明ないしは導出のうち、ベクトルの内積を用いた導出 (Ⅲ節) は、球面三角法余弦定理の証明のために良く用いられる方法となっているので、ベクトル計算に不慣れな履修学生には抵抗感があるかもしれないが、気象学初学者には是非この論理の理解への傾注を推奨したい旨、主張した。赤道座標系から地平座標系への座標変換を用いた導出 (Ⅳ節) も、同様に、推奨に値する旨、主張した。球面三角関数の余弦定理を用いた導出 (Ⅴ節) は、既存の文献において最も頻繁にみられるものであるが、球面三角関数の余弦定理の証明も独自に行うと同じ論理展開を2重に行うことになり冗長となるため、独学でこれらを理解したうえで、他人に説明する際には、「球面三角関数の余弦定理から明らか」として論理を進めることは一向に構わない。

4番目に記載した平面三角関数の余弦定理を用いた導出 (Ⅵ節) は、平面幾何学のみにより太陽高度角公式を求めるものであり、球面三角法や座標変換は一切用いないものの相当程度の幾何学的な鍛錬の蓄積が必要であることを指摘した。

5番目に記載した福井 (1938) による大変ユニークな太陽高度角公式の説明 (Ⅶ節) は、本稿により正しいことを証明した。球面三角法余弦定理や座標回転、更には平面三角法余弦定理等を一切使用しなくとも証明できるので、教員養成系や環境系の気象学初学者教育において有効である可能性が期待される。

最後に、内外の教科書等7文献において、太陽高度角公式の取扱われ方を調査したところ、本稿で記載した5通りの証明ないしは導出のうち、実際に用いられているのは、福井 (1938) の方法を除くと球面三角関数の余弦定理を用いた導出 (Ⅴ節) のみ、しかも天の北極、天頂および太陽で形成される球面三角形の余弦定理が適用できることを指摘するだけでその証明には一切言及していないことが再確認された。「定理だから信じる」的な論理展開なので、教育的な立場からは多々問題が残ることを指摘した。

筆者の「微気象学」や「気候変動論」の講義では、太陽高度角公式 (3) は小倉 (1984, 1999) にも引用される極めて重要な法則であることは毎回講じるものの、時間的制約のためその具体的な導出までは講じることはできなかった。このため、宿題課題として太陽高度角公式 (3) の証明を課し、課題提出後に本稿Ⅱ節およびⅢ節の内容を主とする解説記事を大学ポータルサイトに開示する、という手段を講じてきた。

履修学生からは、ハイパーリンクの掛かったインター

ネット上の情報を検索しまくり、課題回答に繋がると感じたコンテンツを転記したものをレポートと称して提出してくる者が相当数存在するのが実情である。学修支援ツールとしてのインターネットの有用性を否定はしないが、発信されている情報の真贋を吟味することなくコンテンツを、しかも結論部分のみを転記する作業を調査とか引用と称する風潮には重大な危惧を覚える。本稿の内容を授業外学修資料として配布し、履修学生との間でフィードバックを図ることにより、相当の教育効果向上を図ることが可能と料する。

太陽高度角公式 (3) の導出を真に理解できれば、その有用性は論を待たない。大気外全天日射量  $K_{\infty}^{\downarrow}$  が、次式

$$K_{\infty}^{\downarrow} = \max \left[ I_0 \left( \frac{\bar{r}}{r} \right)^2 (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos h), 0 \right] \quad (105)$$

により定まり、太陽時角  $h$  が顕著な日変化をすることから大気外全天日射量  $K_{\infty}^{\downarrow}$  が顕著な日変化をするため、特に日変化を重視する微気象学にとって太陽高度角公式 (3) は必須アイテムとなっている。ここで  $\max [a, b]$  は引数  $a$  と  $b$  のうち大きい方を返すマックス関数である。

Milankovitch (1920) は、太陽黄経  $\theta$  が顕著な年変化をするため太陽黄経  $\theta$  の関数である太陽赤緯  $\delta$  も顕著な年変化をすることから大気外全天日射量  $K_{\infty}^{\downarrow}$  も顕著な年変化をし、更に、相対地心太陽距離  $\frac{r}{\bar{r}}$  が顕著な永年変化をする地球公転軌道離心率  $e$  および近日点黄経  $\theta_p$  の関数であり、かつ、太陽赤緯  $\delta$  が同じく顕著な永年変化をする地球軌道傾斜角  $\varepsilon$  の関数であることから、大気外全天日射量  $K_{\infty}^{\downarrow}$  も顕著な永年変化をして氷期間氷期サイクルを生み出すことを明らかにした。しかし、ミランコビッチ理論は太陽定数  $I_0$  や平均地心太陽距離  $\bar{r}$  を不変と仮定しアインシュタインの一般相対性理論の効果による軌道面の歳差運動を考慮していない等のため、数百万年以上の長期の過去や未来には適用できないとされている。

ミランコビッチ理論教育の根幹は、任意の地点における任意の季節の任意の時刻における太陽高度角を与える本稿の式 (3) や惑星大気外全天日射量を与える本稿の式 (105) の妥当性を理解させることにあり、同一の式 (1) ~ (4) が、数日内の時間スケールでは時角のみに依存して日変化が生じ、数年以内の時間スケールでは太陽黄経依存性により年変化が生じ、数百年を超える時間スケールでは地球公転軌道離心率、軌道傾斜角および近日点黄経の永年変化により年変化の永年変化が生じることを教授すべき旨、主張した。このうち、数日内の時間スケールは微気象・微気候に相当し日変化に主眼が置かれ

るが、永年変化の時間スケールは気候変化に相当し日変化や年変化そのものではなく年変化の経年変化に主眼が置かれることを強調した。

独自に太陽高度角公式 (3) を導出できるまで理解を深めることができれば、上記の事柄に対する履修学生の興味関心が高まり、延いては気象学初年次教育の教育効果向上に資するものと思料する。

ミランコビッチ理論による氷期間氷期サイクルのメカニズムを完全に理解させるためには、太陽高度角公式 (3) だけでなく、地球公転軌道の式 (2) および太陽赤緯の式 (4) の証明ないしは導出に関しても適切な指導が必要と思料されるが、紙面の都合もあり、この点については稿を改めたい。

### 謝辞

本稿は、立正大学地球環境科学部環境システム学科において専任・非常勤通算20年間環境気象教育にたずさわってきた筆者が、教育法の改善を目指して検討と試行を重ねて来た成果をまとめたものである。かつての同僚および履修学生諸氏から賜った種々のご助言・ご教示は本稿起草に大変役立った。また、匿名査読者から賜った二度に亘るレフェリーコメントは原稿改良に大変役立った。記して深謝の意を表します。

### 註

- 1) 福井 (1938) は、点  $R'$  を  $PR \perp PR'$  になるように半円上にプロットした点、としているが、これでは  $\angle TPR$  が終日一定の日没時角であるから点  $R'$  も終日固定点となってしまうため、明らかな誤記載と判断される。
- 2) Milankovitch (1930) は、図 8 から  $N'$  と  $Z'$  を省略しただけの第 2 図を用いて式 (97) と全く同じ第 4 式を導出している。また、Milankovitch (1941) は、図 8 から黄道  $ESE'$  を省略した第 13 図と図 8 から地平線  $HDH'$  を省略し、新たに黄道の極  $P$  および  $P'$  と黄道両極と太陽を結ぶ大円  $PSP'$  と黄道の交点  $G$  を追加した第 14 図を用いて式 (97) と全く同じ第 200 式を導出している。即ち、Milankovitch (1930) および Milankovitch (1941) も Milankovitch (1920) 同様、独自の球面三角法余弦定理の証明は行っていない。
- 3) 気象局長官の要請によりスミソニアン協会が 1850 年頃設立した気象観測システムに関連する気象表集を編纂した Guyot (1852) が *Smithsonian Meteorological Tables* の初版である。1858 年に Second Edition (Guyot 1858)、1859 年に Third Edition (Guyot 1859) と A. Guyot により改訂が重ねられ、主にスミソニアン協会に報告する気象観測者向けに出版されたが、想定外に広く流通し、欧米の気象学者や物理学者に広く利用された。1884 年に Fourth Edition が企画されたものの、最後の数表を残して同年 2 月 8 日に

A. Guyotが死去したため、助手だったW. Libbeyが編集を引継ぎ最後の数表を補記してLibbey (1884) が編集発行された。その9年後にSmithsonian Institution (1893) がFifth Editionとして出版されたが、歴史的にはA. Guyotの表と関連しているものの、資料、配置、表示が大幅に変更されているため、Libbey (1884) に続くFifth Editionではない新しい出版物とみなされている。Forth Revised Editionと標記されているSmithsonian Institution (1918) 冒頭においてSmithsonian Institution (1893) がOriginal Editionで、1896、1897、1907年にRevised Editionされた旨記載されている。Smithsonian Institution (1918) の30年後の1949年に、R. J. Listにより最新改訂版Sixth Revised Editionが編集された後は、新な改訂はなされていない。比較的容易に入手できるSixth Revised EditionはList (1951) である。

## 文献

- Angot, A. 1886: Recherches théoriques sur la distribution de la chaleur à la surface du globe. *J. Phys. Theor. Appl.* **5**(1), 5-16.  
[https://hal.science/jpa-00238693v1/file/ajp-jphystap\\_1886\\_5\\_5\\_0.pdf](https://hal.science/jpa-00238693v1/file/ajp-jphystap_1886_5_5_0.pdf)
- 福井英一郎 1938 : 『気候学』 古今書院, 566p.
- Guyot, A. 1852: *A Collection of Meteorological Tables, with other Tables Useful in Practical Meteorology, prepared by order of the Smithsonian Institution.* Smithsonian Institution, 212p.
- Guyot, A. 1858: *Tables, Meteorological and Physical, prepared for the Smithsonian Institution, Second Edition.* Smithsonian Institution, 636p.
- Guyot, A. 1859: *Tables, Meteorological and Physical, prepared for the Smithsonian Institution, Third Edition.* Smithsonian Institution, 652p.
- Hays, J. D., Imbrie, J., and Shackleton, N. J. 1976 : Variations in the earth's orbit: pacemaker of the ice ages. *Science*, **194**, Issue 4270, 1121-1132.
- Hann, J. 1903: *Handbook of Climatology. Part I. General Climatology.* Macmillan and Co. Ltd., 437p.
- Humphreys, W. J. 1940: *Physics of the Air.* McGraw-Hill Book Company, 676p.
- Libbey, W. Jr. 1884: *Tables, Meteorological and Physical, by Arnold Guyot, Fourth Edition, Revised and Enlarged.* Smithsonian Institution, 781p.
- List, R. J. 1951: *Smithsonian Meteorological Tables, Sixth Revised Edition.* Smithsonian Institution, 527p.
- Meech, L. W. 1857: On the relative intensity of the heat and light of the sun upon different latitudes of the earth. *Smithsonian Contributions to Knowledge*, **9**, 7-58.  
<https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=pst.000031810401&seq=12>
- Milankovitch, M. 1920: *Théorie Mathématique des Phénomènes Thermiques Produits par la Radiation Solaire.* Académie Yougoslave des Sciences et des Arts de Zagreb, Paris, 338p.
- Milankovitch, M. 1930: *Mathematische Klimalehre und Astronomische Theorie der Klimaschwankungen.* Köppen Geigersches Handbuch der Klimatologie, edited by: Köppen, W. and Geiger, R., Borntraeger. Berlin, Band I Teil A, 176p.
- Milankovitch, M. 1941: *Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf des Eiszeitenproblem. Special Publication 132, Section of Mathematical and Natural Sciences*, vol. **33**, Royal Serbian Academy of Sciences, 633p. (柏谷健二・山本淳之・大村 誠・福山 薫・安成哲三 (訳) 1992: 『気候変動の天文学理論と氷河時代』 古今書院, 518p.)
- 森口繁一・宇田川銈久・一松 信 1966 : 『数学公式Ⅱ - 級数・直交系・周期関数 -』 岩波書店, 340p.
- 小倉義光 1984 : 『一般気象学』 東京大学出版会, 314p.
- 小倉義光 1999 : 『一般気象学 [第2版]』 東京大学出版会, 308p.
- 岡田武松 1935 : 『気象学 (改訂版) 下巻』 岩波書店, 530p.
- Regiomontanus, J. 1464: *De Triangulis omnimodis.* 298p.
- Sellers, W. D. 1965: *Physical Climatology.* The University of Chicago Press, 272p.
- Smithsonian Institution 1893: *Smithsonian Meteorological Tables, [Based on Guyot's Meteorological and Physical Tables.]* Smithsonian Institution, 352p.
- Smithsonian Institution 1918: *Smithsonian Meteorological Tables, [Based on Guyot's Meteorological and Physical Tables.], Forth Revised Edition.* Smithsonian Institution, 261p.
- Visconti, G. 2001: *Fundamentals of Physics and Chemistry of the Atmosphere.* Springer, 593p.
- Wiener, C. 1879: Ueber die Stärke der Bestrahlung der Erde durch die Sonne in den verschied enen Breiten und Jahreszeiten. *Zeitschrift der Österreichischen Gesellschaft für Meteorologie*, **14**, 113-130.

## A note on how to derive the solar altitude angle formula

NAKAGAWA Kiyotaka\*

\* Professor Emeritus of Rissho University / Professor Emeritus of Joetsu University of Education

### Abstract :

In current meteorology and climatology, when considering diurnal, annual, and perennial changes in solar radiation, the solar altitude angle formula is almost always discussed as a known law. However, in order to deepen learners' understanding, it is necessary to educate them to include the derivation of the solar altitude angle formula.

The purpose of the present paper is to develop and examine a teaching method for deriving the solar altitude angle formula for beginners in meteorology, and to contribute to elementary meteorological education.

The basis of the teaching of Milankovitch theory is to make students understand the solar altitude angle formula that gives the solar altitude angle at any time of the season at any point in a given time: the same formula is the same as the solar altitude angle on a time scale of several days and depends only on the hour angle, the annual change on a time scale of several years due to the dependence of the solar ecliptic longitude, and the eccentricity of the Earth's orbit on a time scale of more than several hundred years. It should be taught that perennial changes occur due to perennial changes in the orbital inclination and perihelion longitude.

**Key words** : solar altitude angle formula, derivation, solar irradiance at TOA, solar climate, Milankovitch theory